

Kompaktseminar zu „Computational Astrophysics and Cosmology“:
Magnetohydrodynamik (MHD)

Jan-Philip Gehrcke und Malte Lichtner

Julius-Maximilians-Universität Würzburg

24. Oktober 2008

Übersicht

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - allgemeinere Wellenbetrachtung
 - Divergenz des Magnetfeldes

Übersicht

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - allgemeinere Wellenbetrachtung
 - Divergenz des Magnetfeldes

Übersicht

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - allgemeinere Wellenbetrachtung
 - Divergenz des Magnetfeldes

Magnetohydrodynamik

Was ist Magnetohydrodynamik?

Die Magnetohydrodynamik (MHD) beschreibt die **Strömung geladener Teilchen**. Zur Beschreibung der auftretenden **elektromagnetischen Kräfte** werden die **Navier-Stokes-Gleichungen** durch Elemente der **Maxwell-Gleichungen** der Elektrodynamik ergänzt.

Plasmen

Plasma

Teilweise oder vollständig ionisiertes Gas

Extraterrestrische Plasmen

- Galaktische und planetarische Nebel
- Sterne
- Magnetosphären
- ...

Terrestrische Plasmen

- Festkörperplasma
- Fusionsexperimente
- MHD Generatoren
- ...

Plasmen

Plasma

Teilweise oder vollständig ionisiertes Gas

Extraterrestrische Plasmen

- Galaktische und planetarische Nebel
- Sterne
- Magnetosphären
- ...

Terrestrische Plasmen

- Festkörperplasma
- Fusionsexperimente
- MHD Generatoren
- ...

Plasmen

Plasma

Teilweise oder vollständig ionisiertes Gas

Extraterrestrische Plasmen

- Galaktische und planetarische Nebel
- Sterne
- Magnetosphären
- ...

Terrestrische Plasmen

- Festkörperplasma
- Fusionsexperimente
- MHD Generatoren
- ...

Plasma-Eigenschaften und MHD

Debye-Länge

Das **Coulomb-Potential** jeder einzelnen Ladung wird durch seine **Ladungsumgebung** abgeschirmt.

⇒ **Charakteristische Länge λ_D**

Quasi-Neutralität

Betrachte Dynamik auf Skalen $\gg \lambda_D$.

Plasma-Eigenschaften und MHD

Debye-Länge

Das Coulomb-Potential jeder einzelnen Ladung wird durch seine Ladungsumgebung abgeschirmt.

⇒ Charakteristische Länge λ_D

Quasi-Neutralität

Betrachte Dynamik auf Skalen $\gg \lambda_D$.

Plasma-Eigenschaften und MHD

Einflüssigkeits- / Mehrflüssigkeitsmodell

Jede Teilchensorte wird als Flüssigkeit betrachtet. Das Einflüssigkeitsmodell zeigt viele charakteristische Eigenschaften der MHD.

Resistive MHD

- anisotrop (Drucktensor, ...)
- endliche Viskosität ν
- endliche Leitfähigkeit σ
- Wärmeleitung

Ideale MHD

- isotrop (skalärer Druck, ...)
- keine Viskosität ($\nu = 0$)
- idealer Leiter ($\sigma = \infty$)
- keine Wärmeleitung

Plasma-Eigenschaften und MHD

Einflüssigkeits- / Mehrflüssigkeitsmodell

Jede Teilchensorte wird als Flüssigkeit betrachtet. Das Einflüssigkeitsmodell zeigt viele charakteristische Eigenschaften der MHD.

Resistive MHD

- anisotrop (Drucktensor, ...)
- endliche Viskosität ν
- endliche Leitfähigkeit σ
- Wärmeleitung

Ideale MHD

- isotrop (skalärer Druck, ...)
- keine Viskosität ($\nu = 0$)
- idealer Leiter ($\sigma = \infty$)
- keine Wärmeleitung

Plasma-Eigenschaften und MHD

Einflüssigkeits- / Mehrflüssigkeitsmodell

Jede Teilchensorte wird als Flüssigkeit betrachtet. Das Einflüssigkeitsmodell zeigt viele charakteristische Eigenschaften der MHD.

Resistive MHD

- anisotrop (Drucktensor, ...)
- endliche Viskosität ν
- endliche Leitfähigkeit σ
- Wärmeleitung

Ideale MHD

- isotrop (skalärer Druck, ...)
- keine Viskosität ($\nu = 0$)
- idealer Leiter ($\sigma = \infty$)
- keine Wärmeleitung

Die MHD-Gleichungen

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - allgemeinere Wellenbetrachtung
 - Divergenz des Magnetfeldes

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Magnetfeld erzeugt E-Feld (Faraday)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = - \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

- Es fließt ein Strom (Ohm)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Dieser ist wieder mit dem B-Feld verknüpft (Ampère)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Eliminierung von \mathbf{j} und \mathbf{E} ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Magnetfeld erzeugt E-Feld (Faraday)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = - \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

- Es fließt ein Strom (Ohm)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Dieser ist wieder mit dem B-Feld verknüpft (Ampère)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Eliminierung von \mathbf{j} und \mathbf{E} ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Magnetfeld erzeugt E-Feld (Faraday)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = - \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

- Es fließt ein Strom (Ohm)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Dieser ist wieder mit dem B-Feld verknüpft (Ampère)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Eliminierung von \mathbf{j} und \mathbf{E} ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Magnetfeld erzeugt E-Feld (Faraday)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = - \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

- Es fließt ein Strom (Ohm)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Dieser ist wieder mit dem B-Feld verknüpft (Ampère)

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Eliminierung von \mathbf{j} und \mathbf{E} ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Vektoridentität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Quellfreiheit des B-Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Transport-Gleichung (Diffusionsgleichung) des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Definition: Magnetische Reynoldszahl

$$Re_M \equiv \mu \sigma UL$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Vektoridentität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Quellfreiheit des B-Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Transport-Gleichung (Diffusionsgleichung) des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Definition: Magnetische Reynoldszahl

$$Re_M \equiv \mu \sigma UL$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Vektoridentität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Quellfreiheit des B-Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Transport-Gleichung (Diffusionsgleichung) des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Definition: Magnetische Reynoldszahl

$$Re_M \equiv \mu \sigma UL$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Vektoridentität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Quellfreiheit des B-Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Transport-Gleichung (Diffusionsgleichung) des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Definition: Magnetische Reynoldszahl

$$Re_M \equiv \mu \sigma UL$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Ideale MHD: Magnetische Reynoldzahl $Re_M \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} \rightarrow 0$$

- Transport-Gleichung des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- In Erhaltungsform (durch Vektoridentität)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u})$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Ideale MHD: Magnetische Reynoldzahl $Re_M \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} \rightarrow 0$$

- Transport-Gleichung des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- In Erhaltungsform (durch Vektoridentität)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{uB} - \mathbf{Bu})$$

Transportgleichung des Magnetfeldes

- Ideale MHD: Magnetische Reynoldzahl $Re_M \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} \rightarrow 0$$

- Transport-Gleichung des Magnetfeldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- In Erhaltungsform (durch Vektoridentität)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u})}$$

„Eingefrorenes Feld“

- Betrachte magnetischen Fluss durch mitbewegtes Flüssigkeitselement:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{1}{\sigma} \int_{C_M} \mathbf{j} d\mathbf{r}$$

- In der idealen MHD ($\sigma \rightarrow \infty$) ist die Änderung des magnetischen Flusses $\frac{d\phi}{dt} \rightarrow 0$.
- Das Magnetfeld ist „eingefroren“, die Feldlinien werden mit der Strömung verzerrt!

„Eingefrorenes Feld“

- Betrachte magnetischen Fluss durch mitbewegtes Flüssigkeitselement:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{1}{\sigma} \int_{C_M} \mathbf{j} d\mathbf{r}$$

- In der idealen MHD ($\sigma \rightarrow \infty$) ist die Änderung des magnetischen Flusses $\frac{d\phi}{dt} \rightarrow 0$.
- Das Magnetfeld ist „eingefroren“, die Feldlinien werden mit der Strömung verzerrt!

„Eingefrorenes Feld“

- Betrachte magnetischen Fluss durch mitbewegtes Flüssigkeitselement:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{1}{\sigma} \int_{C_M} \mathbf{j} d\mathbf{r}$$

- In der idealen MHD ($\sigma \rightarrow \infty$) ist die Änderung des magnetischen Flusses $\frac{d\phi}{dt} \rightarrow 0$.
- Das Magnetfeld ist „eingefroren“, die Feldlinien werden mit der Strömung verzerrt!

Reconnection

Durch **Verkrümmung und Verdrehung von Feldlinien** können **große Spannungen** aufgebaut werden. Diese Entladen sich bei der **Reconnection**, indem sich die Feldlinien in sehr kurzer Zeit **neu „anordnen“**.

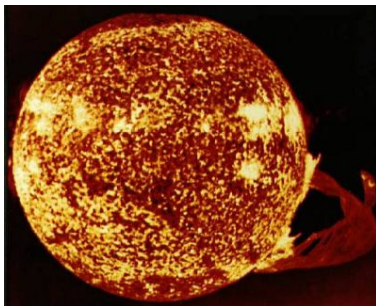


Abbildung: Reconnections verursachen starke Materieauswürfe von der Sonnenoberfläche (Protuberanz)

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der Hydrodynamik

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p$$

- Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Eliminierung von \mathbf{j} (Ampère)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow 0 \right)$$

- Lorentzkraft (ohne \mathbf{j})

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

- Formulierung als Divergenz/Gradient (Vektoridentität)

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (B^2) \right)$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der Hydrodynamik

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p$$

- Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Eliminierung von \mathbf{j} (Ampère)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Lorentzkraft (ohne \mathbf{j})

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

- Formulierung als Divergenz/Gradient (Vektoridentität)

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (B^2) \right)$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der Hydrodynamik

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p$$

- Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Eliminierung von \mathbf{j} (Ampère)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \rightarrow 0\right)$$

- Lorentzkraft (ohne \mathbf{j})

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

- Formulierung als Divergenz/Gradient (Vektoridentität)

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (B^2) \right)$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der Hydrodynamik

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p$$

- Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Eliminierung von \mathbf{j} (Ampère)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Lorentzkraft (ohne \mathbf{j})

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

- Formulierung als Divergenz/Gradient (Vektoridentität)

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (B^2) \right)$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der Hydrodynamik

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p$$

- Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

- Eliminierung von \mathbf{j} (Ampère)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} E \rightarrow 0 \right)$$

- Lorentzkraft (ohne \mathbf{j})

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

- Formulierung als Divergenz/Gradient (Vektoridentität)

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} (B^2) \right)$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{K}$$

- Spannungstensor

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} p + \frac{B^2}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{B^2}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{B^2}{2\mu} \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} B_x^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_x B_y & B_y^2 & B_y B_z \\ B_x B_z & B_x B_y & B_z^2 \end{pmatrix}$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{K}$$

- Spannungstensor

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} p + \frac{B^2}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{B^2}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{B^2}{2\mu} \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} B_x^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_x B_y & B_y^2 & B_y B_z \\ B_x B_z & B_x B_y & B_z^2 \end{pmatrix}$$

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{K}$$

- Spezialfall: homogenes Magnetfeld in z-Richtung $\mathbf{B} = (0, 0, B)$

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} p + \frac{B^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{B^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & p - \frac{B^2}{2} \end{pmatrix}$$

⇒ Druckspannung quer zu den Feldlinien,
Zugspannung parallel zu den Feldlinien

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{K}$$

- Spezialfall: homogenes Magnetfeld in z-Richtung $\mathbf{B} = (0, 0, B)$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} p + \frac{B^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{B^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & p - \frac{B^2}{2} \end{pmatrix}$$

⇒ Druckspannung quer zu den Feldlinien,
Zugspannung parallel zu den Feldlinien

Impulsgleichung

- Impulserhaltung der MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \mathbf{K}$$

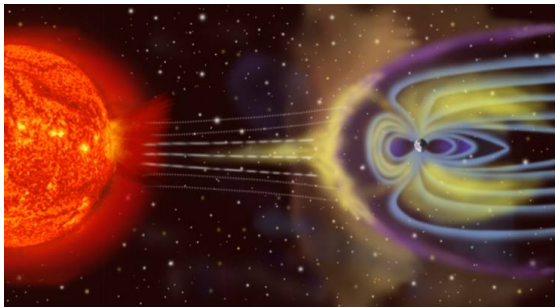
- Spezialfall: homogenes Magnetfeld in z-Richtung $\mathbf{B} = (0, 0, B)$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} p + \frac{B^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{B^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & p - \frac{B^2}{2} \end{pmatrix}$$

⇒ Druckspannung quer zu den Feldlinien,
Zugspannung parallel zu den Feldlinien

Sonnenwind und Magnetosphäre der Erde

Der **Sonnenwind** (ionisierter Teilchenstrom) wird **vom Erdmagnetfeld abgelenkt**. Die Strömung **verformt** dabei das Magnetfeld der Erde.



Gleichungssystem der MHD

- ähnliche Betrachtungen führen auf zusätzliche Energie-Terme
- wähle für alle Gleichungen die Erhaltungsform
- Reskalierung von \mathbf{B} mit $1/\sqrt{\mu}$

Gleichungssystem der MHD in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ (E + p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix} = 0$$

Gleichungssystem der MHD

- ähnliche Betrachtungen führen auf zusätzliche Energie-Terme
- wähle für alle Gleichungen die Erhaltungsform
- Reskalierung von \mathbf{B} mit $1/\sqrt{\mu}$

Gleichungssystem der MHD in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ (E + p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix} = 0$$

Gleichungssystem der MHD

- ähnliche Betrachtungen führen auf zusätzliche Energie-Terme
- wähle für alle Gleichungen die Erhaltungsform
- Reskalierung von \mathbf{B} mit $1/\sqrt{\mu}$

Gleichungssystem der MHD in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ (E + p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix} = 0$$

Gleichungssystem der MHD

- ähnliche Betrachtungen führen auf zusätzliche Energie-Terme
- wähle für alle Gleichungen die Erhaltungsform
- Reskalierung von \mathbf{B} mit $1/\sqrt{\mu}$

Gleichungssystem der MHD in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \\ (E + p + \frac{1}{2} B^2) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix} = 0$$

Übersicht

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - allgemeinere Wellenbetrachtung
 - Divergenz des Magnetfeldes

benötigte DGLs

Magnetfeldevolution (aus Ohms, Ampères und Faradays Gesetzen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0$$

Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0$$

benötigte DGLs

Magnetfeldevolution (aus Ohms, Ampères und Faradays Gesetzen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0$$

Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0$$

Störung des Systems

Störung 1. Ordnung

- $\mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}$

- $\mathbf{u}_{\text{ges}} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}$

- $\rho_{\text{ges}} = \rho_0 + \epsilon \rho$

Einsetzen in DGLs \rightarrow Linearisierung des Systems

Störung des Systems

Störung 1. Ordnung

- $\mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}$

- $\mathbf{u}_{\text{ges}} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}$

- $\rho_{\text{ges}} = \rho_0 + \epsilon \rho$

Einsetzen in DGLs \rightarrow Linearisierung des Systems

Störung des Systems

Störung 1. Ordnung

- $\mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}$

- $\mathbf{u}_{\text{ges}} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}$

- $\rho_{\text{ges}} = \rho_0 + \epsilon \rho$

Einsetzen in DGLs \rightarrow Linearisierung des Systems

Störung des Systems

Störung 1. Ordnung

- $\mathbf{B}_{ges} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}$

- $\mathbf{u}_{ges} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}$

- $\rho_{ges} = \rho_0 + \epsilon \rho$

Einsetzen in DGLs \rightarrow Linearisierung des Systems

Störung des Systems

Störung 1. Ordnung

- $\mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}$

- $\mathbf{u}_{\text{ges}} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}$

- $\rho_{\text{ges}} = \rho_0 + \epsilon \rho$

Einsetzen in DGLs \rightarrow Linearisierung des Systems

linearisiertes System

Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) = 0$$

Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0 = 0$$

linearisiertes System

Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) = 0$$

Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0 = 0$$

Anfangsbedingungen ohne Ortsabhängigkeit

- $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{0z} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho_0$

Anfangsbedingungen ohne Ortsabhängigkeit

- $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{0z} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho_0$

Anfangsbedingungen ohne Ortsabhängigkeit

- $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{0z} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho_0$

Anfangsbedingungen ohne Ortsabhängigkeit

- $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{0z} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho_0$

Ziel: Kompressionswelle in x-Richtung

Störung in x-Richtung

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x) \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho(x)$

Ziel: Kompressionswelle in x-Richtung

Störung in x-Richtung

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x) \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho(x)$

Ziel: Kompressionswelle in x-Richtung

Störung in x-Richtung

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x) \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho(x)$

Ziel: Kompressionswelle in x-Richtung

Störung in x-Richtung

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x) \end{pmatrix}$

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\rho = \rho(x)$

Reduzierung auf „eindimensionales“ System

Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u_x(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z(x) + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u_x(x) = 0$$

Reduzierung auf „eindimensionales“ System

Impulsgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}_0 = 0$$

$$\mu \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_x(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} B_z(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u_x(x) + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} B_z(x) = 0$$

„eindimensionales“ System

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x(x) + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B_z(x) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z(x) + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u_x(x) = 0 \quad (2)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ auf (1), $\frac{\partial}{\partial t}$ auf (2), subtrahieren:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z(x) - \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z(x) = 0 \quad \rightarrow \quad c_A = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$$

Alfvéngeschwindigkeit c_A

analog: Wellengleichung für $u(x)$ \rightarrow Kompressionswelle

„eindimensionales“ System

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x(x) + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B_z(x) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z(x) + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u_x(x) = 0 \quad (2)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ auf (1), $\frac{\partial}{\partial t}$ auf (2), subtrahieren:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z(x) - \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{c_A} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$$

Alfvéngeschwindigkeit $\mathbf{c_A}$

analog: Wellengleichung für $u(x) \rightarrow$ Kompressionswelle

„eindimensionales“ System

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x(x) + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B_z(x) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z(x) + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u_x(x) = 0 \quad (2)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ auf (1), $\frac{\partial}{\partial t}$ auf (2), subtrahieren:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z(x) - \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{c_A} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$$

Alfvéngeschwindigkeit $\mathbf{c_A}$

analog: Wellengleichung für $u(x) \rightarrow$ Kompressionswelle

„eindimensionales“ System

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x(x) + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B_z(x) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B_z(x) + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u_x(x) = 0 \quad (2)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ auf (1), $\frac{\partial}{\partial t}$ auf (2), subtrahieren:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z(x) - \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{c_A} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$$

Alfvéngeschwindigkeit $\mathbf{c_A}$

analog: Wellengleichung für $u(x) \rightarrow$ Kompressionswelle

Entkopplung des „eindimensionalen“ Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

Entkopplung:

- System in Form $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{q}) = 0$
- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} B \\ B_{0z} u \end{pmatrix}$
- $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{f}) = \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \\ B_{0z} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$

Entkopplung des „eindimensionalen“ Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

Entkopplung:

- System in Form $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{q}) = 0$
- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} B \\ B_{0z} u \end{pmatrix}$
- $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{f}) = \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \\ B_{0z} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$

Entkopplung des „eindimensionalen“ Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

Entkopplung:

- System in Form $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{q}) = 0$
- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} B \\ B_{0z} u \end{pmatrix}$
- $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{f}) = \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \\ B_{0z} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$

Entkopplung des „eindimensionalen“ Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

Entkopplung:

- System in Form $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} (\underline{\mathbf{A}}\mathbf{q}) = 0$
- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} B \\ B_{0z} u \end{pmatrix}$
- $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{f}) = \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \\ B_{0z} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$

Entkopplung des „eindimensionalen“ Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B + B_{0z} \frac{\partial}{\partial x} u = 0$$

Entkopplung:

- System in Form $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}\mathbf{q}) = 0$
- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ B \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0} B \\ B_{0z} u \end{pmatrix}$
- $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{f}) = \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_{0z}}{\mu\rho_0} \\ B_{0z} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B_{0z}^2}{\mu\rho_0}}$

Übersicht

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - **allgemeinere Wellenbetrachtung**
 - Divergenz des Magnetfeldes

Linearisierung und Entkopplung aller MHD-Gleichungen („eindimensionale“ Betrachtung)

Eigenwerte der Jacobimatrix:

$$\lambda_1 = u - c_f$$

$$\lambda_2 = u - c_A$$

$$\lambda_3 = u - c_s$$

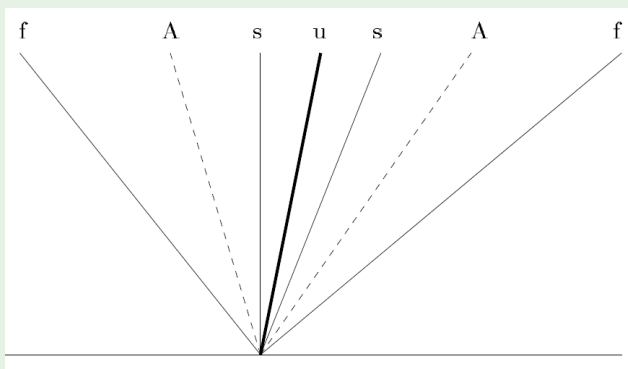
$$\lambda_4 = u$$

$$\lambda_5 = u + c_s$$

$$\lambda_6 = u + c_A$$

$$\lambda_7 = u + c_f$$

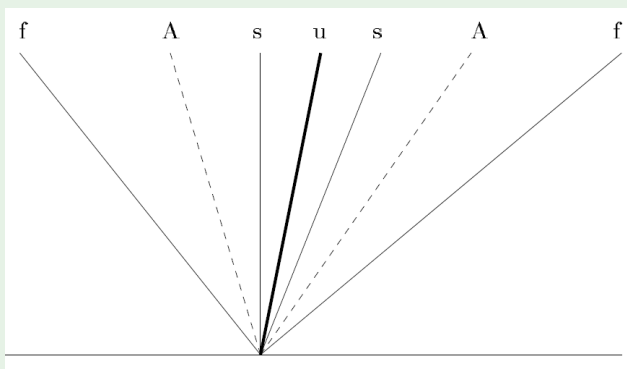
Charakteristiken



gewöhnliche Gasdynamik: $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$

magnetoakustische Wellen: $a^2 = \frac{d}{d\rho}(p + B^2)$

Charakteristiken



gewöhnliche Gasdynamik: $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$

magnetoakustische Wellen: $a^2 = \frac{d}{d\rho}(p + B^2)$

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Riemann-Problem

Evolution innerhalb eines Zeitschritts durch Lösen des Riemann-Problems

strikt hyperbolisch (z.B. Eulergleichungen)

- $m \times m$ -System: m Wellen
- Wellen klassifizierbar

nicht strikt hyperbolisch (MHD)

- für manche Bereiche des Phasenraums entartetes Spektrum
- Punkte/Bereiche im Phasenraum haben nicht m Charakteristiken
- es gibt Spezialfälle, in denen Wellen koppeln
- Lösen ist schwierig, es gibt approximative Riemannlöser

Übersicht

- 1 Teil I - Einführung
 - Motivation
 - Die MHD-Gleichungen
- 2 Teil II - Wellenphänomene und Numerik
 - Alfvén-Welle „in 1D“
 - allgemeinere Wellenbetrachtung
 - Divergenz des Magnetfeldes

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

Problem bei numerischer Lösung: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- echte Lösung erfüllt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- numerische Lösungen aber nicht unbedingt
- gesonderte Behandlung verbessert numerische Lösung teilweise deutlich

verschiedene Ansätze

- Projektion auf divergenzfreien Raum
- „staggered grids“

divergenzfreier Raum

Ein Vektorfeld \mathbf{V} kann immer zerlegt werden in Summe aus

- Gradientenfeld $\nabla\Phi$
- Rotationsfeld $\text{rot } \mathbf{W}$
- $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W}$

dann ist $\mathbf{V} - \nabla\Phi$ divergenzfrei wegen $\text{div rot} = 0$

divergenzfreier Raum

Ein Vektorfeld \mathbf{V} kann immer zerlegt werden in Summe aus

- Gradientenfeld $\nabla\Phi$
- Rotationsfeld $\text{rot } \mathbf{W}$
- $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W}$

dann ist $\mathbf{V} - \nabla\Phi$ divergenzfrei wegen $\text{div rot} = 0$

divergenzfreier Raum

Ein Vektorfeld \mathbf{V} kann immer zerlegt werden in Summe aus

- Gradientenfeld $\nabla\Phi$
- Rotationsfeld $\text{rot } \mathbf{W}$
- $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W}$

dann ist $\mathbf{V} - \nabla\Phi$ divergenzfrei wegen $\text{div rot} = 0$

divergenzfreier Raum

Ein Vektorfeld \mathbf{V} kann immer zerlegt werden in Summe aus

- Gradientenfeld $\nabla\Phi$
- Rotationsfeld $\text{rot } \mathbf{W}$
- $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W}$

dann ist $\mathbf{V} - \nabla\Phi$ divergenzfrei wegen $\text{div rot} = 0$

divergenzfreier Raum

Ein Vektorfeld \mathbf{V} kann immer zerlegt werden in Summe aus

- Gradientenfeld $\nabla\Phi$
- Rotationsfeld $\text{rot } \mathbf{W}$
- $\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W}$

dann ist $\mathbf{V} - \nabla\Phi$ divergenzfrei wegen $\text{div rot} = 0$

Φ berechnen, \mathbf{B} korrigieren

Poisson Problem zur Berechnung von Φ

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W} \quad | \quad \nabla \cdot$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\Phi$$

in numerisches Verfahren integrieren:

- Startwerte Q^n inklusive B^n (divergenzfrei)
- nach Δt : Q^* inkl. B^* (nicht divergenzfrei)
- lösen: $\nabla \cdot B^* = \nabla^2\phi^{n+1}$
- korrigieren: $B^{n+1} = B^* - \nabla\phi^{n+1}$

Φ berechnen, \mathbf{B} korrigieren

Poisson Problem zur Berechnung von Φ

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W} \quad | \quad \nabla \cdot$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\Phi$$

in numerisches Verfahren integrieren:

- Startwerte \mathbf{Q}^n inklusive \mathbf{B}^n (divergenzfrei)
- nach Δt : \mathbf{Q}^* inkl. \mathbf{B}^* (nicht divergenzfrei)
- lösen: $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = \nabla^2\phi^{n+1}$
- korrigieren: $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla\phi^{n+1}$

Φ berechnen, \mathbf{B} korrigieren

Poisson Problem zur Berechnung von Φ

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W} \quad | \quad \nabla \cdot$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\Phi$$

in numerisches Verfahren integrieren:

- Startwerte \mathbf{Q}^n inklusive \mathbf{B}^n (divergenzfrei)
- nach Δt : \mathbf{Q}^* inkl. \mathbf{B}^* (nicht divergenzfrei)
- lösen: $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = \nabla^2\phi^{n+1}$
- korrigieren: $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla\phi^{n+1}$

Φ berechnen, \mathbf{B} korrigieren

Poisson Problem zur Berechnung von Φ

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W} \quad | \quad \nabla \cdot$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\Phi$$

in numerisches Verfahren integrieren:

- Startwerte \mathbf{Q}^n inklusive \mathbf{B}^n (divergenzfrei)
- nach Δt : \mathbf{Q}^* inkl. \mathbf{B}^* (nicht divergenzfrei)
- lösen: $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = \nabla^2\phi^{n+1}$
- korrigieren: $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla\phi^{n+1}$

Φ berechnen, \mathbf{B} korrigieren

Poisson Problem zur Berechnung von Φ

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W} \quad | \quad \nabla \cdot$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\Phi$$

in numerisches Verfahren integrieren:

- Startwerte \mathbf{Q}^n inklusive \mathbf{B}^n (divergenzfrei)
- nach Δt : \mathbf{Q}^* inkl. \mathbf{B}^* (nicht divergenzfrei)
- lösen: $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = \nabla^2\phi^{n+1}$
- korrigieren: $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla\phi^{n+1}$

Φ berechnen, \mathbf{B} korrigieren

Poisson Problem zur Berechnung von Φ

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \text{rot } \mathbf{W} \quad | \quad \nabla \cdot$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2\Phi$$

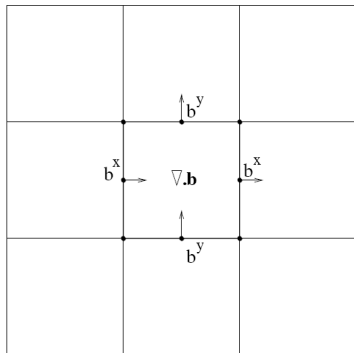
in numerisches Verfahren integrieren:

- Startwerte \mathbf{Q}^n inklusive \mathbf{B}^n (divergenzfrei)
- nach Δt : \mathbf{Q}^* inkl. \mathbf{B}^* (nicht divergenzfrei)
- lösen: $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = \nabla^2\phi^{n+1}$
- korrigieren: $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla\phi^{n+1}$

staggered grid

Beispiel: Magnetfeld in 2D

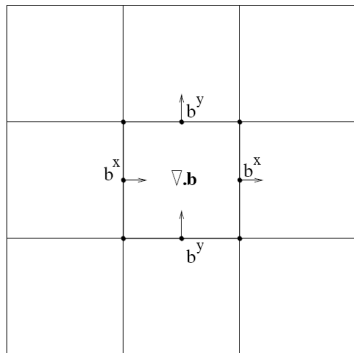
- $x = j\Delta x$ und $y = k\Delta y$
- verschobenes Speichern von B_x und B_y
- $B_{x,j+1/2,k}$ und $B_{y,j,k+1/2}$
- num. Div.: $(\text{div } B)_{j,k} = \frac{B_{x,j+1/2,k} - B_{x,j-1/2,k}}{\Delta x} + \frac{B_{y,j,k+1/2} - B_{y,j,k-1/2}}{\Delta y}$



staggered grid

Beispiel: Magnetfeld in 2D

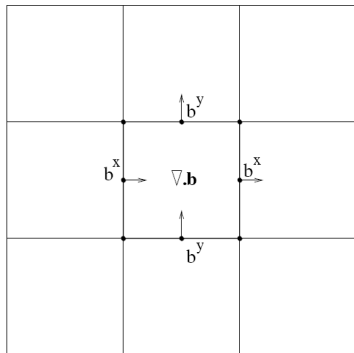
- $x = j\Delta x$ und $y = k\Delta y$
- verschobenes Speichern von B_x und B_y
- $B_{x,j+1/2,k}$ und $B_{y,j,k+1/2}$
- num. Div.: $(\text{div } B)_{j,k} = \frac{B_{x,j+1/2,k} - B_{x,j-1/2,k}}{\Delta x} + \frac{B_{y,j,k+1/2} - B_{y,j,k-1/2}}{\Delta y}$



staggered grid

Beispiel: Magnetfeld in 2D

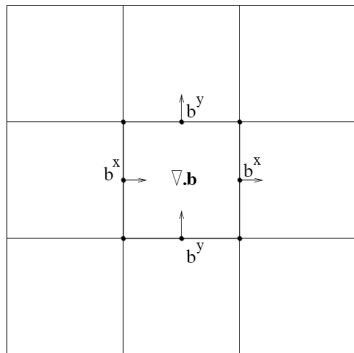
- $x = j\Delta x$ und $y = k\Delta y$
- verschobenes Speichern von B_x und B_y
- $B_{x,j+1/2,k}$ und $B_{y,j,k+1/2}$
- num. Div.: $(\text{div } B)_{j,k} = \frac{B_{x,j+1/2,k} - B_{x,j-1/2,k}}{\Delta x} + \frac{B_{y,j,k+1/2} - B_{y,j,k-1/2}}{\Delta y}$



staggered grid

Beispiel: Magnetfeld in 2D

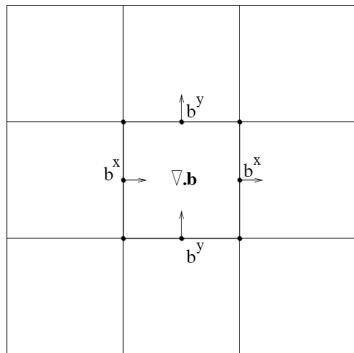
- $x = j\Delta x$ und $y = k\Delta y$
- verschobenes Speichern von B_x und B_y
- $B_{x,j+1/2,k}$ und $B_{y,j,k+1/2}$
- num. Div.: $(\text{div } \mathbf{b})_{j,k} = \frac{B_{x,j+1/2,k} - B_{x,j-1/2,k}}{\Delta x} + \frac{B_{y,j,k+1/2} - B_{y,j,k-1/2}}{\Delta y}$



staggered grid

Beispiel: Magnetfeld in 2D

- $x = j\Delta x$ und $y = k\Delta y$
- verschobenes Speichern von B_x und B_y
- $B_{x,j+1/2,k}$ und $B_{y,j,k+1/2}$
- num. Div.: $(\text{div } B)_{j,k} = \frac{B_{x,j+1/2,k} - B_{x,j-1/2,k}}{\Delta x} + \frac{B_{y,j,k+1/2} - B_{y,j,k-1/2}}{\Delta y}$



staggered grid - Warum?

Beispiel: Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = 0$$

Finite Differenzenmethode

- $B_{x,j+1/2,k}^{n+1} = B_{x,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j+1/2,k-1/2}^n)$
- $B_{y,j,k+1/2}^{n+1} = B_{y,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j-1/2,k+1/2}^n)$

Methode einsetzen in numerische Divergenz $\rightarrow (\operatorname{div} B)^{n+1} = (\operatorname{div} B)^n !!$

\rightarrow Ein geschickt gewähltes Gitter mit passendem Verfahren erhält „automatisch“ die Divergenz.

staggered grid - Warum?

Beispiel: Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = 0$$

Finite Differenzenmethode

- $B_{x,j+1/2,k}^{n+1} = B_{x,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j+1/2,k-1/2}^n)$
- $B_{y,j,k+1/2}^{n+1} = B_{y,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j-1/2,k+1/2}^n)$

Methode einsetzen in numerische Divergenz $\rightarrow (\operatorname{div} B)^{n+1} = (\operatorname{div} B)^n !!$

\rightarrow Ein geschickt gewähltes Gitter mit passendem Verfahren erhält „automatisch“ die Divergenz.

staggered grid - Warum?

Beispiel: Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = 0$$

Finite Differenzenmethode

- $B_{x,j+1/2,k}^{n+1} = B_{x,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j+1/2,k-1/2}^n)$
- $B_{y,j,k+1/2}^{n+1} = B_{y,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j-1/2,k+1/2}^n)$

Methode einsetzen in numerische Divergenz $\rightarrow (\operatorname{div} B)^{n+1} = (\operatorname{div} B)^n !!$

\rightarrow Ein geschickt gewähltes Gitter mit passendem Verfahren erhält „automatisch“ die Divergenz.

staggered grid - Warum?

Beispiel: Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = 0$$

Finite Differenzenmethode

- $B_{x,j+1/2,k}^{n+1} = B_{x,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j+1/2,k-1/2}^n)$
- $B_{y,j,k+1/2}^{n+1} = B_{y,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j-1/2,k+1/2}^n)$

Methode einsetzen in numerische Divergenz $\rightarrow (\text{div } B)^{n+1} = (\text{div } B)^n !!$

\rightarrow Ein geschickt gewähltes Gitter mit passendem Verfahren erhält „automatisch“ die Divergenz.

staggered grid - Warum?

Beispiel: Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = 0$$

Finite Differenzenmethode

- $B_{x,j+1/2,k}^{n+1} = B_{x,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j+1/2,k-1/2}^n)$
- $B_{y,j,k+1/2}^{n+1} = B_{y,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j-1/2,k+1/2}^n)$

Methode einsetzen in numerische Divergenz $\rightarrow (\text{div } B)^{n+1} = (\text{div } B)^n !!$

\rightarrow Ein geschickt gewähltes Gitter mit passendem Verfahren erhält „automatisch“ die Divergenz.

staggered grid - Warum?

Beispiel: Magnetfeldevolution

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = 0$$

Finite Differenzenmethode

- $B_{x,j+1/2,k}^{n+1} = B_{x,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j+1/2,k-1/2}^n)$
- $B_{y,j,k+1/2}^{n+1} = B_{y,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Omega_{x,j+1/2,k+1/2}^n - \Omega_{x,j-1/2,k+1/2}^n)$

Methode einsetzen in numerische Divergenz $\rightarrow (\text{div } B)^{n+1} = (\text{div } B)^n !!$

\rightarrow Ein geschickt gewähltes Gitter mit passendem Verfahren erhält „automatisch“ die Divergenz.

Literaturverzeichnis



R. J. LeVeque

Magnetohydrodynamics



P. A. Davidson

Magnetohydrodynamics



Gábor Tóth

The $\text{div } B = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes



Horst Wobig

Magnetohydrodynamik