# Forschungsmodul: Komplexe Systeme

Bericht zur Vorlesung vom 10. Januar 2008 von Jan-Philip Gehrcke

---

## Ungekoppelte und gekoppelte Oszillatoren

Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Oszillatoren mit den Phasen $\theta_1$, $\theta_2$ und den Frequenzen

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \;;\;\; \omega_2 = \dot{\theta}_2 \,.$$

Trägt man den zeitlichen Verlauf der Phasen der beiden Oszillatoren gegeneinander auf einem “Quadrat mit $2\pi$ -periodischen Randbedingungen” oder einem Torus auf, so lassen sich grundsätzlich zwei verschiedene Verhaltensweisen beobachten:

- $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ rational:

  Zeitlich periodischer Verlauf der (beliebig dichten) Bahn im $\theta_1$ - $\theta_2$ -Raum.

- $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ irrational:

  In diesem Fall ist der Verlauf quasiperiodisch: Die Bahn erreicht im Laufe der Zeit - und unabhängig von der Startbedingung - jeden Punkt im $\theta_1$ - $\theta_2$ -Raum. Allgemein gilt, dass sich die Trajektorie niemals selbst schneidet.

Unter Fouriertransformation würde man die beiden Frequenzpeaks des ungekoppelten Systems bei $\omega_1$ und $\omega_2$ feststellen.

Nun sollen die Oszillatoren einer Kopplung unterliegen, welche durch die Kopplungskonstanten $K_1$ und $K_2$ charakterisiert ist:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + K_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + K_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Die Variable dieses gekoppelten Systems ist nun die Phasendifferenz $\phi = \theta_1 - \theta_2$. Deren Ableitung, also die Frequenz $\omega$ des Gesamtsystems, folgt stabilen Fixpunkten für dieselbe “Einrastfrequenz” $\omega_E$ bei konstanter Phasendifferenz $\phi_E$. Das gilt aber nur für folgenden Fall:

$$|\omega_1 - \omega_2| < K_1 + K_2$$

Das System verhält sich dann periodisch. Für $|\omega_1 - \omega_2| = K_1 + K_2$ tritt eine Sattel-Knoten-Bifurkation auf.

**Deterministisches Chaos**

Wie bereits angedeutet, darf sich die Bahn im Phasenraum eines Systems im zeitlichen Verlauf aus Gründen der Eindeutigkeit nicht selbst kreuzen. Daher “spiralen” Bahnen in zweidimensionalen Systemen auf einen Fixpunkt oder enden in einem Grenzzyklus. Andere Möglichkeiten gibt es nicht; somit besteht in zwei Dimensionen “kein Platz” für chaotisches Verhalten. Bei einem drei- oder höherdimensionalem Phasenraum hingegen kann Chaos ausbrechen; wie z.B. beim getriebenen Pendel oder beim Lorenz-System.

Das in drei Dimensionen gegebene Lorenz-System besteht aus drei gekoppelten, gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Bei spezieller Parameterwahl $\sigma$, $r$, $b$ erhält man ein deterministisch chaotisches Verhalten des Systems. Dabei liegt die Trajektorie im Phasenraum auf einem sogenannten seltsamen Attraktor. Dieser wird als “schmetterlingsförmig” bezeichnet. Eine durch numerische Approximation gewonnene Visualisierung ist in Abb. 1 dargestellt. Der seltsame Attraktor ist gekennzeichnet durch zeitlich exponentielles Schrumpfen eines Phasenraumvolumes $V(t)$, wie sich rechnerisch zeigen lässt.

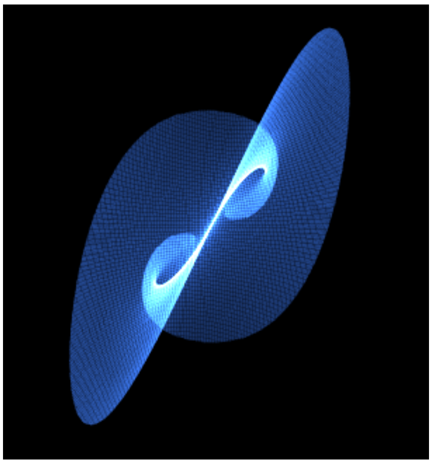

*Abb. 1: Numerisch approximierte Bahn auf dem seltsamen Lorenz-Attraktor.*
*Von ito.mathematik.uni-halle.de/~julitz/*

Dass die chaotische Trajektorie auf dem seltsamen Attraktor des Lorenz-Systems einer deterministischen Dynamik folgt, ist einsichtig, wenn man z.B. die Beziehung der Werte aufeinanderfolgender Maxima $z_n$ der $z$-Koordinate der Bahn zueinander betrachtet. Dann stellt man fest, dass zwischen ihnen ein Zusammenhang der Form $z_{n+1} = f(z_n)$, also eine Poincaré-Abbildung, existiert.

## Chaotische Abbildungen

Das wichtigste Beispiel für eine einfache nichtlineare Gleichung, welche zu chaotischem Verhalten führt, ist die sogenannte logistische Gleichung:

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ mit } f(x) = r \cdot x \cdot (1-x)$$

Für $0<r<4$ ist $x_n$ auf das Intervall $[0,1]$ beschränkt. $x_n$ besitzt jedoch in Abhängigkeit von $r$ verschieden viele Fixpunkte. Liegt mehr als ein Fixpunkt vor, lautet die Bedingung für den Fall, dass $x_n$ nicht zu einem Fixpunt hin konvergiert, sondern zwischen mehreren “springt”:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_k)| = \lambda$$

Chaotisch wird dieses “Sprungverhalten” für $\lambda>0$ . $\lambda$ wird auch LIAPUNOV-Exponent genannt. Bei der besprochenen Gleichung wechselt $x_n$ ab $r=3$ zwischen zwei Häufungspunkten. Ab $r\approx 3{,}45$ existieren vier Fixpunkte. Diese Periodenverdopplung schreitet rasch vorran, bis ab $r\approx 3{,}57$ keine Perioden mehr zu erkennen sind und das Verhalten chaotisch wird. Die Folge $x_n$ ist in Abhängigkeit des Parameters $r$ in Abb. 2 dargestellt.

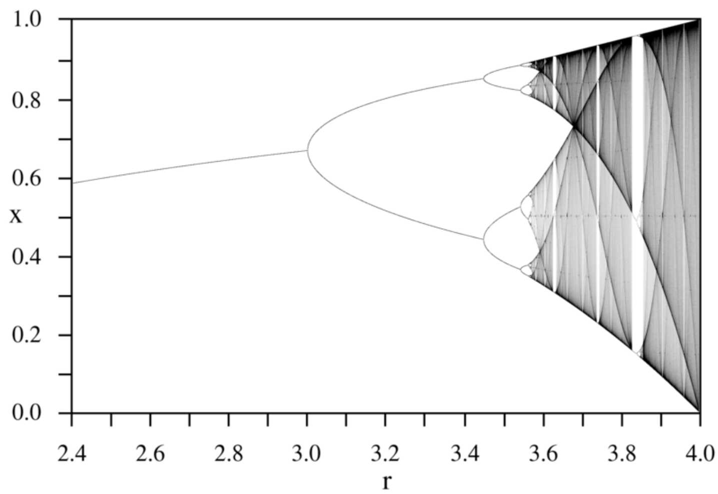


*Abb. 2: Visualisierung der Iteration der Folge $x_n$ der logistischen Gleichung in Abhängigkeit des Parameters $r$. Deutlich sichtbar sind die ersten Punkte der Periodenverdopplung, sowie der erstmalige Beginn des Chaos' ab $r\approx 3{,}57$ .*
*Von de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung*

Die Punkte $r_n$ der Periodenverdopplung führen zusammen zur FEIGENBAUM-Konstanten $\delta$ :

$$r_n - r_c = \frac{A}{\delta^n} \text{ und somit } \delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1}-r_n} \approx 4{,}669$$

Die FEIGENBAUM-Konstante ist eine universelle Größe und spielt in mehreren Modellen und Systemen eine Rolle.