

Forschungsmodul: Komplexe Systeme

Bericht zur Vorlesung vom 07. Feb. 2008 von Jan-Philip Gehrcke

Produktzustände des Exklusionsprozesses

Der stationäre Zustand des asymmetrischen Exklusionsprozesses sei ein inhomogener Produktzustand (aufgrund der Vorzugsrichtung der Teilchen):

$$|P_{stat}\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_N\rangle$$

Die zeitliche Änderung dieses Zustands verschwindet, also muss nach der Mastergleichung notwendigerweise gelten:

$$L|P_{stat}\rangle = 0$$

Dies jedoch ist bereits erfüllt, wenn jeder auf nur zwei nebeneinanderliegende Gitterplätze wirkende LIOUVILLE-Operator $L_{k,k+1}$ angewandt auf den stationären Zustand $|P_{stat}\rangle$ verschwindet (hinreichende Bedingung, deren Betrachtung i.d.R. ausreicht):

$$L_{k,k+1}|P_{stat}\rangle = 0 \quad \forall i=1, \dots, N-1$$

Für die $|\Psi_i\rangle$ des inhomogenen stationären Produktzustandes bedeutet das:

$$L_{k,k+1}(|\Psi_k\rangle \otimes |\Psi_{k+1}\rangle) = 0$$

Mit $|\Psi_i\rangle = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$, den Weiterückraten λ_R bzw. λ_L und der Randbedingung der Wahrscheinlichkeitserhaltung $a_i + b_i = 1$ (hinreichende Normierung) ergibt sich dann:

$$a_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_L}\right)^i} \quad \text{bzw.} \quad b_i = \frac{\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_L}\right)^i}{1 + \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_L}\right)^i}$$

Dabei entspricht b_i der Teilchendichte. Somit wurde eine exakte Lösung für die mittlere Teilchenverteilung im stationären Zustand gefunden. Auffällig ist, dass die Observablen nur durch das Verhältnis der Weiterrückraten bestimmt werden. Da ein Produktzustand angenommen wurde, ist der stationäre Zustand korrelationsfrei.

Analog zu den bisher betrachteten homogenen Produktzuständen

$$|P_{stat}\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

bei denen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, gelang es DERRIDA mithilfe von Matrixproduktzuständen korrelierte Zustände zu erzeugen. Unter Zuhilfenahme von Vektoren $\langle e|, |f\rangle$ (aus einem "Hilfsraum") kann man dann schreiben:

$$|P_{stat}\rangle = \langle e| \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right] |f\rangle$$

Dabei sind A und B Matrizen. Für den asymmetrischen Prozess, also $\lambda_R \neq \lambda_L$, gilt $[A, B] \neq 0$. Dann ist $|P_{stat}\rangle$ nicht mehr korrelationsfrei.

Mit der Methode der Matrixproduktzustände ergibt sich also ein Formalismus, der Exklusionsprozess-Probleme unter Berücksichtigung von Korrelationen lösbar macht. Auf diese Weise gelang es, den stationären Zustand des asymmetrischen Exklusionsprozess mit Teilchenreservoirs an den Enden (also Zu- und Abfuhr) exakt zu bestimmen.

Symmetriegruppe $SU(2)$ und der Exklusionsprozess

Die $SU(2)$ ist die Gruppe der unitären Transformationen in zwei Dimensionen mit der Determinante $\det = 1$.

Gruppenelemente $U \in SU(2)$ lassen sich mithilfe von Generatoren A darstellen:

$$U = e^{iA}$$

Die Unitarität von U fordert, dass A hermitesch ist: $U^\dagger U = UU^\dagger = 1 \Rightarrow A = A^\dagger$

Die Determinantenbedingung fordert Spurlosigkeit: $\det(U) = 1 \Rightarrow \text{Tr}(A) = 0$

Diesen Forderungen genügen die Paulimatrizen $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$, mit denen ein Spin beschrieben werden kann. Sie können zusammengefasst werden zu einem Tensor- bzw. Vektoroperator $\vec{\sigma}$:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^x \\ \sigma^y \\ \sigma^z \end{pmatrix}$$

Es lassen sich Auf-/Absteigeoperatoren definieren:

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$$

Die $SU(2)$ ist eine nichtkommutative Gruppe. Dies wird anschaulich, wenn man folgende Kommutatoren bildet:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$$

$$[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^z$$

$$[\sigma^z, \sigma^\pm] = \pm 2\sigma^\pm$$

Bemerkenswert ist außerdem, dass $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}$ eine $SU(2)$ -Invariante ist:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soweit ist die Standarddarstellung eines Spins auf $\mathbb{C}^2$ beschrieben. Möchte man jedoch ein größeres Spinsystem betrachten (bestehend aus L Spins), muss man die entsprechende Darstellung auf $\mathbb{C}^{2^L}$ konstruieren.

Hierbei kann man sich zunutze machen, dass $U \otimes U \otimes \dots \otimes U$ (L mal) eine $SU(2)$ -Darstellung in $\mathbb{C}^{2^L}$ ist, wenn gilt: $U \in SU(2)$ in $\mathbb{C}^2$ -Darstellung (Isomorphismus).

Mit $U = e^{iA}$ ($U \in SU(2)$ sowie Generator A in $\mathbb{C}^2$ -Darstellung) erhält man den gesuchten Generator A' in $\mathbb{C}^{2^L}$ -Darstellung:

$$A' = \sum_{i=1}^L A_i \quad \text{mit} \quad A_i = 1^{\otimes i-1} \otimes A \otimes 1^{\otimes L-i}$$

Es fällt auf: Während sich die Gruppenelemente U' aus Tensorprodukten zusammensetzen, werden die entsprechenden Generatoren A' durch Summen gebildet.

Somit lassen sich nun $SU(2)$ -Generatoren für eine Spinkette der Länge L definieren:

$$S^{\pm} = \sum_{i=1}^L \sigma_i^{\pm} \quad \text{mit} \quad \sigma_i^{\pm} = 1^{\otimes i-1} \otimes \sigma^{\pm} \otimes 1^{\otimes L-i}$$

$$S^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sigma_i^z \quad \text{mit} \quad \sigma_i^z = 1^{\otimes i-1} \otimes \sigma^z \otimes 1^{\otimes L-i}$$

Da $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}$ $SU(2)$ -invariant ist, ist es einleuchtend, dass auch $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_i$ (gleiche Komponenten) eine $SU(2)$ -Invariante ist. Dass auch $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$ (unterschiedliche Komponenten) unter $SU(2)$ -Transformation invariant ist, lässt sich zeigen.

Bei der entsprechenden Rechnung ergibt sich, dass jeder Operator H der Form

$$H = const \cdot \mathbf{1} + \sum_{i \neq j} A_{ij} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

$SU(2)$ -invariant ist. Der LIOUVILLE-Operator des Exklusionsprozesses hat diese Form. In Bezug auf den Exklusionsprozess stellt sich heraus, dass einige der beschriebenen Größen und Operatoren ihre Entsprechungen in grundlegenden Symmetrien und Eigenschaften des Prozesses finden:

- $SU(2)$ -Symmetrie $\triangleq$ Teilchenzahlerhaltung
- $S^0 \triangleq$ Anzahl der Teilchen (bis auf Konstanten und Faktoren)
- $S^\pm \triangleq$ Teilchenzufuhr und -entnahme
- $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \triangleq$ Hüpfen von einem Teilchen an Platz i nach Platz j (der Operator erhält also die Teilchenzahl)