

Halleffekt

Ein Praktikumsversuch

Jan-Philip Gehrcke und Malte Lichtner

An einer p-dotierten Tellurprobe wurde der Halleffekt untersucht. Durch Messung der Hall- und Längsspannung im Temperaturbereich 77 K bis 300 K bei konstantem Magnetfeld und Probenstrom wurden die Bandlücke von Tellur sowie die Inversionstemperatur, die Elektronen- und Löcherbeweglichkeiten und die Akzeptorkonzentration der Probe bestimmt. Desweiteren wurde der funktionelle Zusammenhang zwischen Magnetowiderstand und Magnetfeldstärke bei 77 K sowie bei 300 K untersucht.

Versuchsdurchführung: 20. März 2008
Abgabe der Auswertung: 31. März 2008

1 Einleitung

1879 entdeckte Edwin Hall in einem stromdurchflossenen Leiter - welcher sich in einem Magnetfeld befindet - das Auftreten einer elektrischen Spannung senkrecht zur Stromrichtung. Dieser Effekt wurde später nach ihm Halleffekt genannt. Heute wird er für einige wichtige Anwendungen genutzt. Dazu gehört die Magnetfeldvermessung mit Hall-Sonden aber auch insbesondere die mikroskopische Charakterisierung von Leitern und Halbleitern. Im Rahmen dieses Versuchs wurde die Möglichkeit genutzt, mit dem Hall-Effekt über die einfache Messung makroskopischer Größen wie Strom und Spannung, mikroskopische Größen einer p-dotierten Tellurprobe - wie die Bandlücke und die Beweglichkeiten der Ladungsträger zu bestimmen. Für industrielle Zwecke sind diese Bestimmungsmöglichkeiten extrem wichtig, da sie mit simplen Messungen schnell Aufschluss über die intrinsischen Eigenschaften einer Probe geben.

2 Theorie

Für das Verständnis des Versuchs und die Auswertung der Messdaten wird im Folgenden die zugrundeliegende Physik kurz dargelegt.

Legt man an einem Leiter in Längsrichtung ein elektrisches Feld \mathbf{E}_L an, so folgen die Ladungsträger der Bewegungsgleichung [1]

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right) \mathbf{v}_D = \frac{q}{m^*} \mathbf{E}_L \quad (1)$$

mit der Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_D , der Ladung q , der mittleren Stoßzeit τ und der effektiven Masse m^* . Im stationären Fall erhält man [1]

$$\mathbf{v}_D = \frac{q\tau}{m^*} \mathbf{E}_L \quad (2)$$

Die mittlere Stoßzeit τ wird dabei durch Phononenstreuung und Stöße an Störstellen begrenzt. Daraus definiert

man die Ladungsträgerbeweglichkeit [1]

$$\mu = \frac{q\tau}{m^*} \quad (3)$$

Für die elektrische Leitfähigkeit erhält man

$$\sigma = \rho^{-1} = \sum_i |q_i| n_i \mu_i \quad (4)$$

durch Summierung über alle Ladungsträgerarten mit den Ladungsträgerdichten n_i im Material.

Wird zusätzlich zum elektrischen Feld \mathbf{E}_L ein magnetisches Feld \mathbf{B} angelegt, so ändert sich die Bewegungsgleichung der Ladungsträger zu [1]

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right) \mathbf{v}_D = \frac{q}{m^*} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) \quad (5)$$

mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_H$. Das Hallfeld \mathbf{E}_H entsteht dabei durch die magnetisch induzierte Ladungsträgerverschiebung. Im stationären Fall heben sich die Kraft durch das Hallfeld und die Lorentzkraft gerade auf. Für $\mathbf{E}_L \perp \mathbf{B}$ und eine quaderförmige Probengeometrie (siehe Abb. 1) erhält man die Hallspannung [2]

$$U_H = R_H \frac{IB}{h} \quad (6)$$

mit der Hallkonstanten R_H , der Stromstärke I , der magnetischen Flussdichte B und dem Durchmesser h der Probe senkrecht zur Stromrichtung. Die Form der Hallkonstanten hängt von der Anzahl verschiedener Ladungsträger ab. Im Metall, in dem nur Elektronen zur Ladung beitragen (unipolar), hat sie die einfache Form [2]

$$R_H = \frac{1}{ne} \quad (7)$$

mit der Elektronendichte n und der Elementarladung des Elektrons e . Im Halbleiter hingegen tragen sowohl Elektronen (e) als auch Löcher (h) zur elektrischen Leitung bei (bipolar), wodurch sich die Hallkonstante zu [2]

$$R_H = \frac{n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2}{e(n_h \mu_h + n_e \mu_e)^2} \quad (8)$$

ändert. Für die Ladungsträgerkonzentrationen im idealen Halbleiter gilt [2]

$$n_e = n_{e0} \exp\left(-\frac{E_{gap} - \epsilon}{k_B T}\right) \quad (9)$$

$$n_h = n_{h0} \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \quad (10)$$

mit der Energielücke zwischen Valenz- und Leitungsband E_{gap} , dem chemischen Potential ϵ , der Boltzmannkonstante k_B sowie der Temperatur T . Bei der sogenannten Inversionstemperatur T_{inv} haben die Hallkonstante $R_H(T)$ und damit die Hallspannung $U_H(T)$ einen Nulldurchgang.

Wird ein Halbleiter dotiert, so ändern sich seine elektrischen Eigenschaften. Die Fremdatome stellen zusätzliche Ladungsträger zur Verfügung, die schon bei sehr geringen Temperaturen frei werden. Bei hohen Temperaturen kann die Dotierung näherungsweise vernachlässigt werden (intrinsischer Bereich). Bei tiefen Temperaturen hingegen dominieren die Ladungsträger der Dotieratome (extrinsischer Bereich).

Ein weiteres Phänomen bei Anlegen des Magnetfeldes B ist der Magnetowiderstand. Durch ihre statistische Geschwindigkeitsverteilung kompensiert das Hallfeld E_H nur für wenige Ladungsträger genau die Lorentzkraft. Alle anderen werden von ihrer Bahn abgelenkt, was zu einer verringerten Driftgeschwindigkeit v_D in Stromrichtung und damit zu einem erhöhten Widerstand führt. Es gilt [4]

$$\xi(B) = \frac{R(B) - R(0)}{R(B)} \propto B^\alpha \quad (11)$$

mit den Widerständen $R(0)$ ohne Magnetfeld und $R(B)$ mit Magnetfeld. Für den idealen, nicht entarteten Halbleiter findet man näherungsweise $\alpha = 2$ [4].

3 Versuchsaufbau

Zur Erzeugung des für den Halleffekt benötigten Magnetfeldes dient ein großer Elektromagnet mit Eisenkern. Zwischen seinen Polschuhen befindet sich die zu untersuchende Probe. Der für die Messungen verwendete p-dotierte Tellur-Einkristall (Abb. 1) hat folgende Abmaße [3]:

$$h = 1,63 \text{ mm}$$

$$d = 2,74 \text{ mm}$$

$$l = 8,35 \text{ mm}$$

Zur ohmschen Charakterisierung kann eine Längsspannung U_L entlang der Probe gemessen werden; die dafür verwendeten Kontakte befinden sich im Abstand $x = 4,20 \text{ mm}$. Zur Messung der Hallspannung U_H wurde eine Drei-Punkt-Schaltung (Potentiometerschaltung) verwendet. Über den Potentiometerwiderstand ist somit vor jeder Hallspannungsmessung bei ausgeschaltetem Magnetfeld genau $U_H = 0 \text{ V}$ einzustellen, um die Potentialdifferenz zwischen zwei exakt gegenüberliegenden Punkten an der Probe zu messen.

Zwischen den Polschuhen des Magneten sind desweiteren eine geeichte InSb-Hallsonde und ein Kupfer-Konstantan-Thermoelement platziert. Somit ist die Flussdichte des für den Halleffekt verantwortlichen

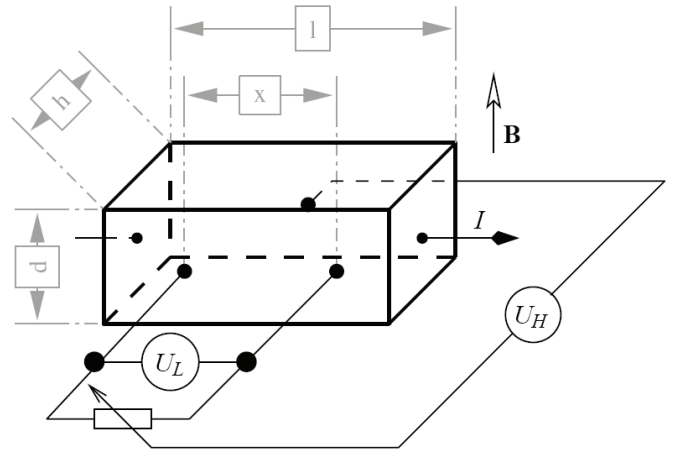


Abb. 1: Quaderförmige Geometrie und Beschaltung des Tellurkristalls.

Magnetfeldes bestimmbar sowie die Temperatur der nahen Umgebung der Probe.

Um die Probentemperatur regulieren zu können, ist der Raum zwischen den Polschuhen mit einer Styroporhülle umgeben, durch die Stickstoff hindurchgeleitet werden kann. Mit Stickstoffgas und letztlich auch flüssigem Stickstoff kann die Probe von der Raumtemperatur (etwa 300 K) bis zur Siedetemperatur des Stickstoffs ($77,4 \text{ K}$) abgekühlt werden.

Zur Aufnahme von Probenstromstärke, Hallspannung bzw. Längsspannung und Thermospannung standen jeweils präzise Messgeräte zur Verfügung. Magnetstrom und Probenstrom konnten per Schalter umgepolt werden.

Für die Messung der Hallspannung in Abhängigkeit der Temperatur wurden jeweils vier Messwerte für alle Kombinationen von positivem/negativem Proben- bzw. Magnetstrom aufgenommen. Vor jeder dieser Messungen wurde die oben beschriebene Potentiometereinstellung vorgenommen (Eichung auf 0 V). Da diese Potentiometereinstellung wegen großen Kontaktierungsproblemen an der Probe (extreme Temperaturabhängigkeit) schnell abdriftete, wurde sie direkt der Aufnahme eines Messwerts für die Hallspannung nochmal notiert. Der Messwert der Hallspannung wurde dann um den somit einzuschätzenden Drift korrigiert. Die beschriebenen vier Messwerte zu einer Hallspannung wurden auf diese Weise aufgenommen und dann gemittelt. Dieses Verfahren sollte den großen Einfluss des Potentiometerdrifts eindämmen.

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1 Eichung des Thermoelements

Um der gemessenen Thermospannung U_{Th} am Kupfer-Konstantan-Thermoelement eine Temperatur T zuzuordnen zu können, lag eine Eichentabelle parat. Wir stellten jedoch fest, dass die höchste gemessene Thermospannung laut Tabelle einer niedrigeren Temperatur als der Siedetemperatur von Stickstoff entspricht, welche die real niedrigste

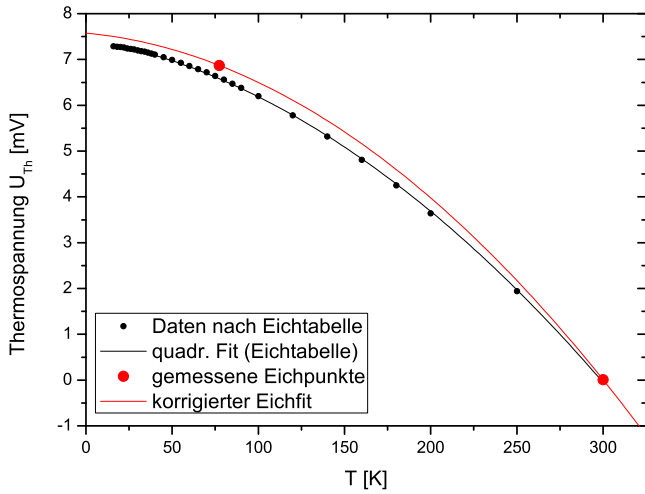


Abb. 2: Vorgegebene (schwarz) und an die gemessenen Fixpunkte angepasste (rot) Eichkurve für das Kupfer-Konstantan-Thermoelement.

Temperatur während des Experiments war. Die vorliegende Eichung bedurfte also einer Korrektur. Dazu erstellten wir einen quadratischen Fit der Daten der Eichabelle und passten diesen anhand von zwei gemessenen Fixpunkten (Raumtemperatur: $T = 300\text{ K} \Leftrightarrow U_{Th} = 0,01\text{ mV}$; Siedetemperatur: $T = 77,35\text{ K} \Leftrightarrow U_{Th} = 6,87\text{ mV}$) an unseren Versuchsaufbau an. Die entsprechenden Kurven sind in Abb. 2 dargestellt.

4.2 Hystereseverhalten des Magneten

Während des Versuchs wird das Magnetfeld des Elektromagneten oft an- und ausgeschaltet bzw. umgepolt, indem der Magnetstrom innerhalb eines großen Intervalls (von -15 A bis 15 A) verändert wird. Es ist also von Bedeutung das Hystereseverhalten des verwendeten Eisenkerns zu kennen. Aus diesem Grund zeichnen wir eine Hysteresekurve auf: In Abhängigkeit des Magnetstroms I maßen wir das Magnetfeld $B(I)$ mithilfe der InSb-Hallsonde. Beginnend bei 0 A legten wir den Nullpunkt für die Hallsonde fest und änderten die Stromstärke zuerst in positiver Richtung bis 15 A . Danach folgte die Senkung bis auf -15 A und der Rückweg bis $I = 0\text{ A}$. Die entsprechenden Magnetfeldstärken nahmen wir in kurzen Abständen auf. Die Messdaten führen zu der in Abbildung 3 dargestellten Hysteresekurve.

Für die folgenden Versuchsteile muss die magnetische Flussdichte für $I = \pm 10\text{ A}$ bekannt sein. Sie soll aus der gewonnenen Kurve abgelesen werden. Wäre der Nullpunkt für einen vollständig entmagnetisierten Kern festgelegt worden, wäre die Hysteresekurve punktsymmetrisch zum Ursprung des Graphen. Unser willkürlich festgelegter Nullpunkt sorgt für eine Verschiebung der Kurve nach unten. Die gewünschte Flussdichte erhalten wir also aus dem Mittelwert der Ablesewerte für $I = +10\text{ A}$ und $I = -10\text{ A}$:

$$B(\pm 10\text{ A}) = (0,768 \pm 0,050)\text{ T}$$

Der Fehler entstammt einer großzügigen Schätzung des Ablesefehlers.

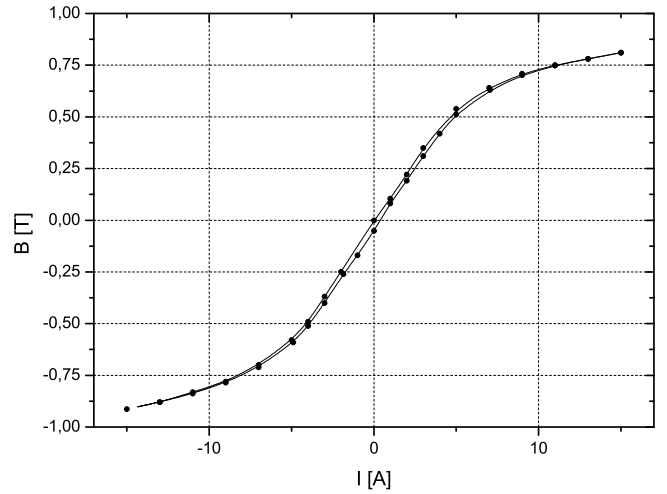


Abb. 3: Hysteresekurve des Eisenkerns im Elektromagneten. Für $I = \pm 10\text{ A}$ spielt es kaum eine Rolle, von welcher Richtung ausgehend man diese Stromstärke einstellt.

Der Form der Hysteresekurve ist zu entnehmen, dass ein sogenanntes magnetisch weiches Material für den Kern verwendet wurde. Dieses besitzt eine geringe Remanenz bzw. Koerzitivfeldstärke und somit eine kleine Fläche unter der Kurve. Das bedeutet gerade für die im Folgenden verwendeten Stromstärken von $I = \pm 10\text{ A}$, dass es eine vernachlässigbare Rolle spielt, von welcher Richtung kommend sie eingestellt werden. Eventuelle Abweichungen sind im Fehler von $B(\pm 10\text{ A})$ berücksichtigt.

4.3 Ohmsches Verhalten der Tellurprobe

Für $B = 0\text{ T}$ wurde das ohmsche Verhalten der Probe geprüft. Dafür wurde die Längsspannung U_L in Abhängigkeit des Probenstroms gemessen und grafisch aufgetragen. Das Resultat ist in Abb. 4 zu betrachten. Der Ausreißer für $I = 10\text{ mA}$ wird für die Bildung einer Ausgleichsgeraden nicht mit einbezogen. Die ersten neun Messwerte liefern eine hervorragende Linearität. Die Probe zeigt also ohmsches Verhalten. Ihr Widerstand beträgt $(7,84 \pm 0,07)\Omega$.

4.4 Bandlücke von Tellur

Im intrinsischen Bereich wird die Ladungsträgerkonzentration gut durch (9) und (10) beschrieben. Für den Widerstand gilt

$$\rho \propto n_i^{-1}$$

mit der intrinsischen Ladungsträgerkonzentration

$$n_i = \sqrt{n_e n_h} \propto \exp\left(-\frac{E_{gap}}{k_B T}\right)$$

In der Auftragung von $\ln \rho$ über T^{-1} (Abb. 5) kann E_{gap} aus der Steigung im intrinsischen Bereich (erste vier Datenpunkte) bestimmt werden. Mit dem Fehler der Geradensteigung erhält man

$$E_{gap} = (0,346 \pm 0,015)\text{ eV}.$$

Dieser Wert stimmt im Rahmen des Fehlers mit dem Literaturwert $E_{gap,Lit} = 0,334\text{ eV}$ [5] überein.

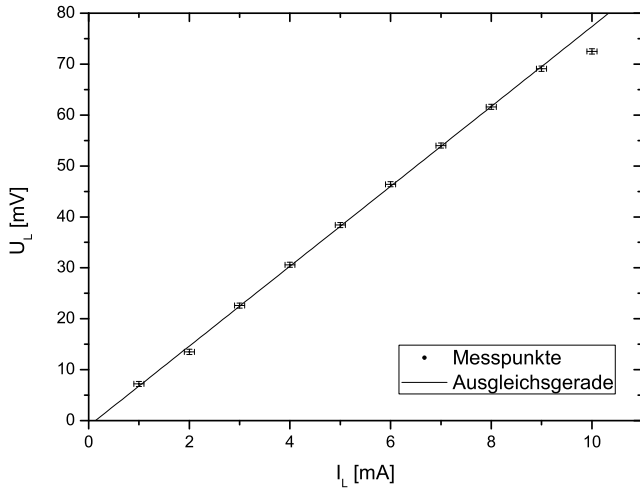


Abb. 4: Längsspannung U_L in Abhängigkeit des Probenstroms I_L . Der lineare - also ohmsche - Zusammenhang ist unter Zuhilfenahme einer Ausgleichsgeraden deutlich zu erkennen.

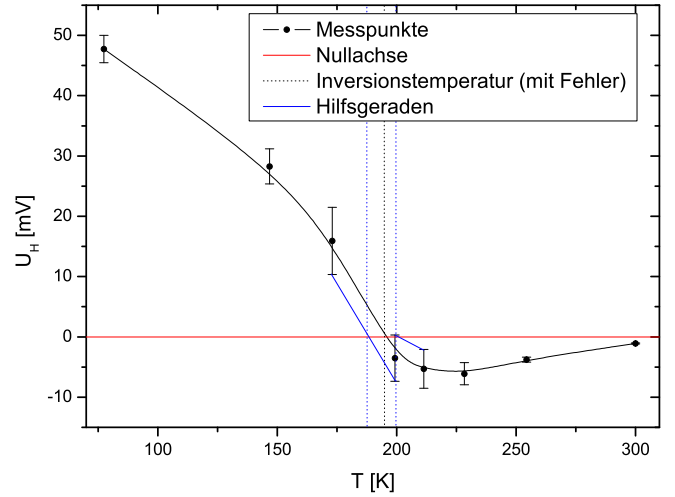


Abb. 6: Temperaturabhängigkeit der Hallspannung U_H . Die Inversionstemperatur T_{inv} wird am Nulldurchgang abgelesen. Die Hilfsgeraden dienen zur Abschätzung des Fehlers.

4.5 Inversionstemperatur

Zur Bestimmung der Inversionstemperatur wird die Hallspannung U_H über der Temperatur aufgetragen (siehe Abb. 6). Die Temperatur T_{inv} des Nulldurchgangs wird bestimmt und der Fehler mithilfe der Fehlerbalken abgeschätzt. Man erhält

$$T_{inv} = (195,9 + 5,0 - 7,6) K$$

4.6 Beweglichkeiten

Über die Messung des temperaturabhängigen Widerstandes können Aussagen über die Elektronen- und Löcherbeweglichkeiten getroffen werden. Bei der Inversionstemperatur gilt

$$0 = \mu_h^2 n_h + \mu_e^2 n_e \quad (12)$$

$$n_h = n_A + n_e \quad (13)$$

$$\sigma_{inv} = e(\mu_h n_A + (\mu_h + \mu_e) n_e) \quad (14)$$

mit der Akzeptorkonzentration n_A . Im extrinsischen Bereich hingegen ist die Elektronenkonzentration null und für die Leitfähigkeit gilt:

$$\sigma_{ext} = \rho_{ext}^{-1} = e\mu_h n_A \quad (15)$$

Aus (12) bis (15) erhält man einen Ausdruck für das Verhältnis von Elektronen- zu Löcherbeweglichkeit:

$$\frac{\mu_e}{\mu_h} = \frac{\sigma_{inv}}{\sigma_{inv} - \sigma_{ext}} = \left(1 - \frac{\rho_{inv}}{\rho_{ext}}\right)^{-1} \quad (16)$$

ρ_{inv} und ρ_{ext} werden aus Abb. 5 ermittelt. Für ρ_{inv} wird ein passender Messwert bei T_{inv} übernommen und der Fehler abgeschätzt. Um einen Wert für ρ_{ext} bei der Inversionstemperatur zu erhalten, wird ρ vom extrinsischen Bereich bis T_{inv} extrapoliert und ein Fehler abgeschätzt. Es ergeben sich:

$$\rho_{inv} = (0,18 \pm 0,06) \Omega m$$

$$\rho_{ext} = (0,67 \pm 0,14) \Omega m$$

Für das Verhältnis der Beweglichkeiten erhält man

$$\frac{\mu_e}{\mu_h} = (1,36 \pm 0,20)$$

Dabei liegt - wie in der Regel - die Elektronen- über der Löcherbeweglichkeit. Im extrinsischen Bereich tragen nur Löcher zur Leitung bei. Über (8) und (15) kann eine Hallbeweglichkeit

$$\mu_H = \frac{R_H}{\rho_{ext}} \quad (17)$$

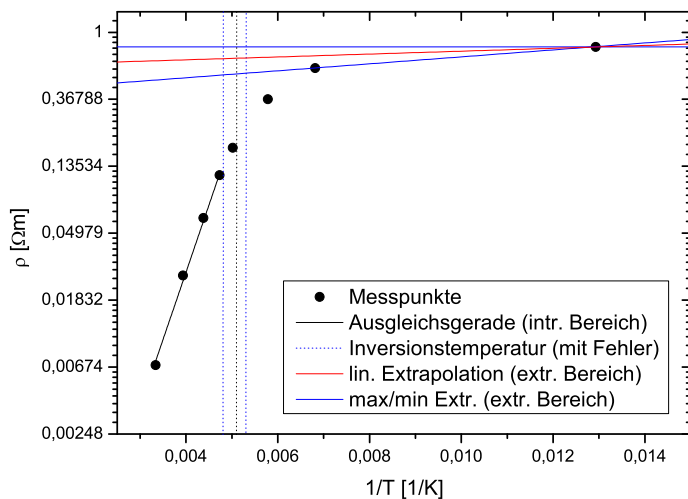


Abb. 5: Logarithmische Auftragung des spezifischen Widerstandes ρ über der inversen Temperatur. Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden im intrinsischen Bereich (erste vier Messpunkte) wird die Bandlücke E_{gap} berechnet. Aus der Extrapolation des Widerstandes vom extrinsischen Bereich zur Inversionstemperatur T_{inv} wird ρ_{ext} bestimmt, was zur Berechnung der Beweglichkeiten $\mu_{e,h}$ benötigt wird.

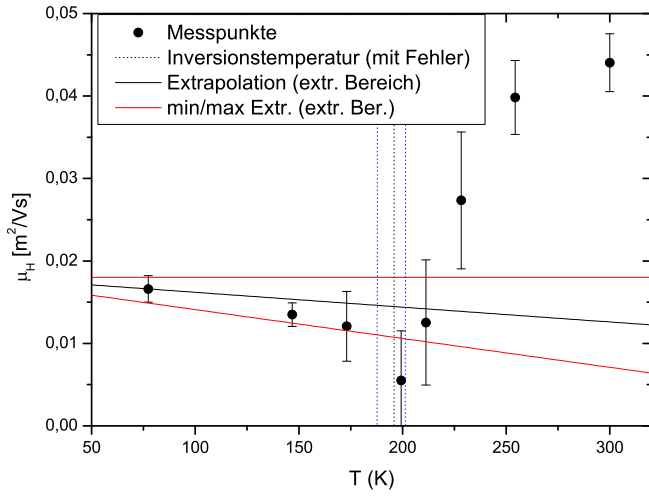


Abb. 7: Temperaturabhängigkeit der Hallbeweglichkeit. Durch lineare Extrapolation aus dem extrinsischen Bereich wird die Löcherbeweglichkeit μ_h bestimmt.

definiert werden, die im extrinsischen Bereich mit μ_h übereinstimmt. Durch Extrapolation der Hallbeweglichkeit $\mu_H(T)$ aus dem extrinsischen Bereich wird μ_h bei der Inversionstemperatur mit Fehler abgeschätzt (siehe Abb. 7). Man erhält

$$\mu_h = (145 \pm 37) \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

und mit dem bekannten Verhältnis der Beweglichkeiten:

$$\mu_e = (205 \pm 61) \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

Die großen Fehler resultieren aus der geringen Anzahl von Messwerten im extrinsischen Bereich. Eventuell hätte man die Untersuchung des tiefen Temperaturbereichs durch eine moderatere Nutzung des Kühlmittels optimieren können.

4.7 Magnetowiderstand

Für die Messung des Magnetowiderstands wurde der Probenstrom auf konstante 10 mA eingestellt. Bei Raumtemperatur (300 K) und der niedrigsten erreichbaren Temperatur (77 K) wurde dann für verschiedene Magnetfeldstärken die Längsspannung an der Probe bestimmt. Nach Gleichung (11) wurde dann die relative Widerstandsänderung $\xi(B)$ über B doppellogarithmisch aufgetragen. Die Abbildungen 9 und 8 zeigen das Ergebnis. Für beide Temperaturen ist jeweils ein möglicher Potenzfit mit dem theoretisch erwarteten Exponenten $\alpha = 2$ eingetragen. Wegen der Differenzbildung zweier nahezu gleichgroßer Größen liefert eine entsprechende Fehlerfortpflanzung in unserem Fall Fehler, die die Mittelwerte vom Betrage her deutlich übertreffen und einen beliebig großen Spielraum zur Anpassung lassen. Die verwendeten Fehler lauten:

$$\sigma_{R(0)} = \pm 0,05 \Omega$$

$$\sigma_{R(B)} = \pm 0,01 \Omega$$

Für $T = 300 \text{ K}$ zeigten die ersten Messwerte für geringe Flussdichten keine Abweichung im Vergleich zu $B = 0 \text{ T}$;

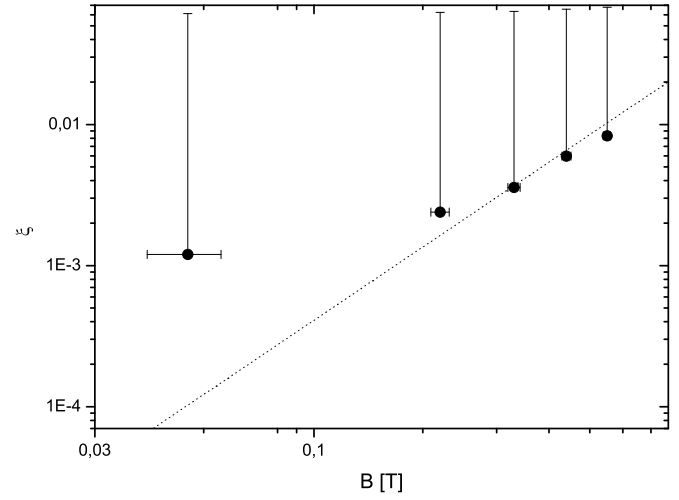


Abb. 8: Relative Widerstandsänderung $\xi(B)$ in Abhängigkeit des Magnetfeldes B bei der Temperatur $T = 77 \text{ K}$. Eingetragen ist ein möglicher Potenzfit mit dem Exponenten $\alpha = 2$. Wegen der Größe der Fehler ist diese Messung jedoch nicht aussagekräftig. Die Fehlerbalken gehen beliebig weit nach unten - auch wenn sie wegen logarithmischer Auftragung nicht abgebildet sind.

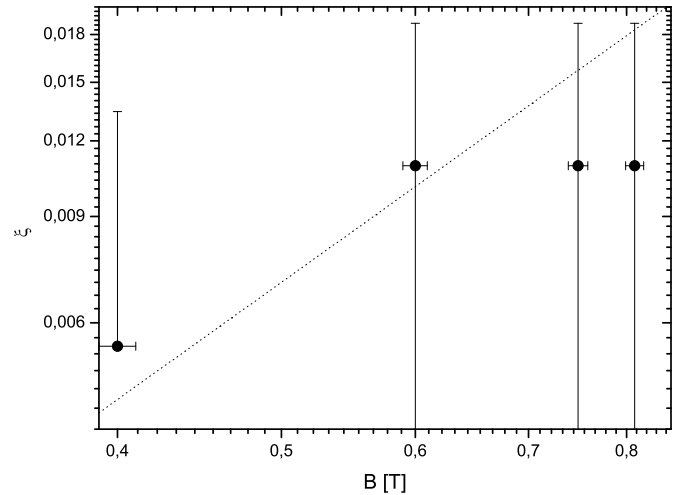


Abb. 9: Relative Widerstandsänderung $\xi(B)$ in Abhängigkeit des Magnetfeldes B bei der Temperatur $T = 300 \text{ K}$. Eingetragen ist ein möglicher Potenzfit mit dem Exponenten $\alpha = 2$. Wegen der Größe der Fehler ist diese Messung jedoch nicht aussagekräftig. Die Fehlerbalken gehen beliebig weit nach unten - auch wenn sie wegen logarithmischer Auftragung teilweise nicht abgebildet sind.

dementsprechend erhielten wir hier $\xi = 0$. Wegen der logarithmischen Auftragung sind diese Messwerte nicht im Graphen enthalten. Die Fehlerbalken in beiden Graphen führen praktisch beliebig weit nach unten; sind jedoch teilweise - falls sie in den negativen Bereich fallen - ebenfalls wegen der logarithmischen Auftragung nicht abgebildet. Für $T = 77 \text{ K}$ ging uns bei dieser Messung der Stickstoff aus. Daher konnten wir $\xi(B)$ nicht für Flussdichten oberhalb von $B = 0,5 \text{ T}$ bestimmen.

Insgesamt ist die Messung wegen der angesprochenen Gründe nicht aussagekräftig.

v

5 Zusammenfassung

Bei diesem Versuch gelang es uns trotz einiger Schwierigkeiten bei der Kontaktierung der Probe und somit prinzipiell schlechten Messdaten vernünftige Werte für die Bandlücke, die Elektronen- und Löcherbeweglichkeiten, die Inversionstemperatur und die Akzeptorkonzentration des Tellurkristalls zu erhalten. Dieses war durch geeignete Korrekturmaßnahmen möglich. Prinzipiell hätten wir jedoch ohne die angesprochenen Probleme deutlich mehr und bessere Messwerte aufnehmen können. Für die Charakterisierung des Magnetowiderstands bei verschiedenen Temperaturen waren unsere Messwerte - unabhängig vom Kontaktierungsproblem - viel zu ungenau.

Insgesamt haben wir durch den Versuch und die entsprechende Auswertung einen Einblick erhalten, mit welchen einfachen Mitteln mikroskopische Größen, die ein Material für die elektronische Anwendung charakterisieren, zu bestimmen sind.

Literatur

- [1] Singh J., Semiconductor Devices - Basic Principles, Wiley, 2000
- [2] Sze S.M., Physics of Semiconductor Devices, Wiley-Interscience, 1981
- [3] Anleitung Fortgeschrittenenpraktikum: Halleffekt
- [4] Melissinos A.C., Experiments in Modern Physics, Academic Press, 2003
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Tellur>