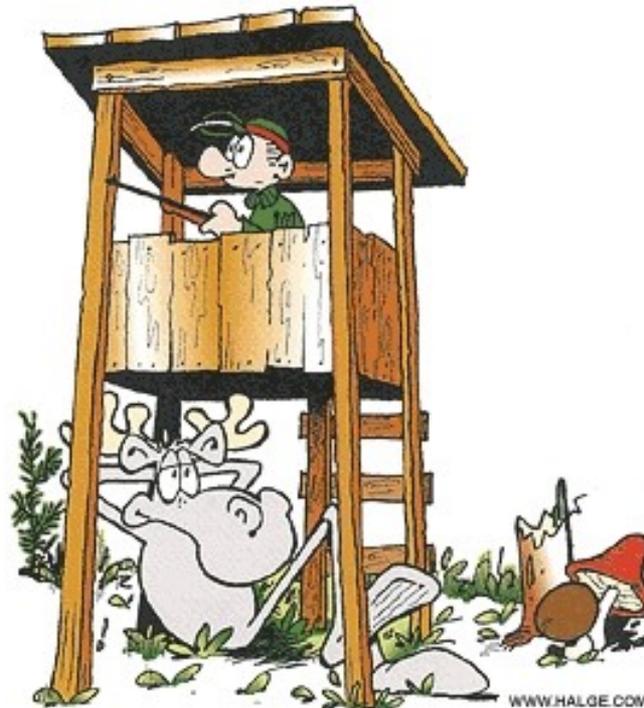


Kompaktseminar Nanoelektronik

Das Rauschen überlisten



Jan-Philip Gehrcke
29. Januar 2009

Was ist Rauschen?

Was ist Rauschen?

zufällig verteilte Störgröße
in Übertragungssystemen

Art des Rauschens wird anhand **spektraler Leistungsdichte** klassifiziert

Spektrale Leistungsdichte: $\frac{dp}{df} \left[\frac{W}{Hz} \right]$

Was ist Rauschen?

Es gibt zwei Rauschklassen

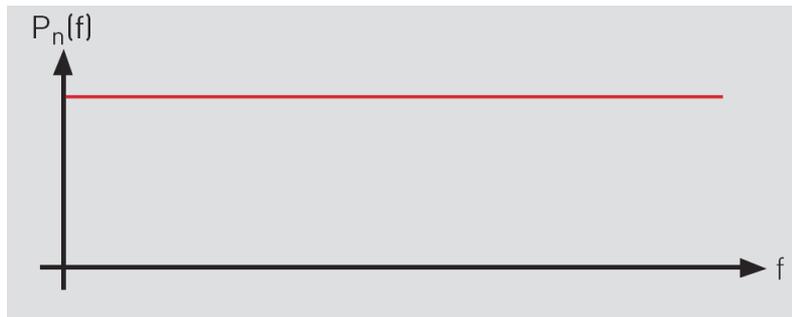
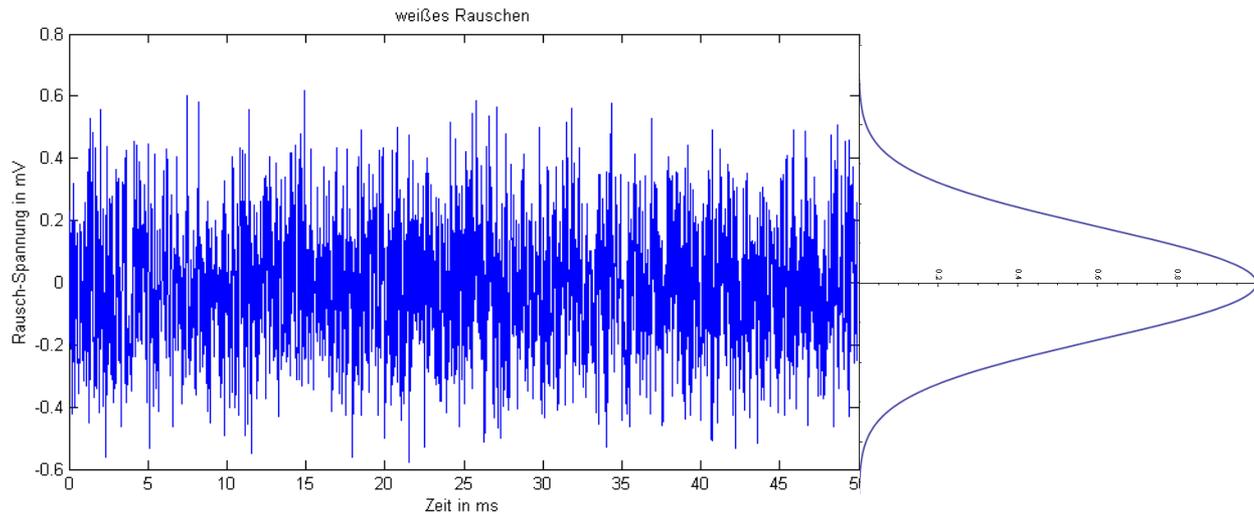
• weißes Rauschen: $\frac{dp}{df} = const$

• farbiges Rauschen: $\frac{dp}{df} \neq const$

Was ist Rauschen?

Weißes Rauschen

$$\frac{dp}{df} = \text{const}$$

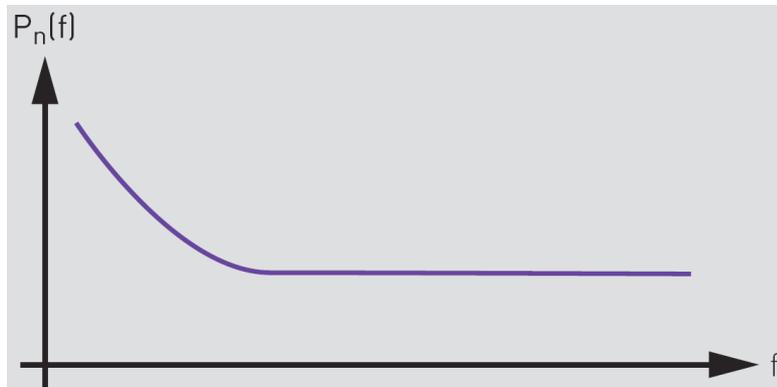
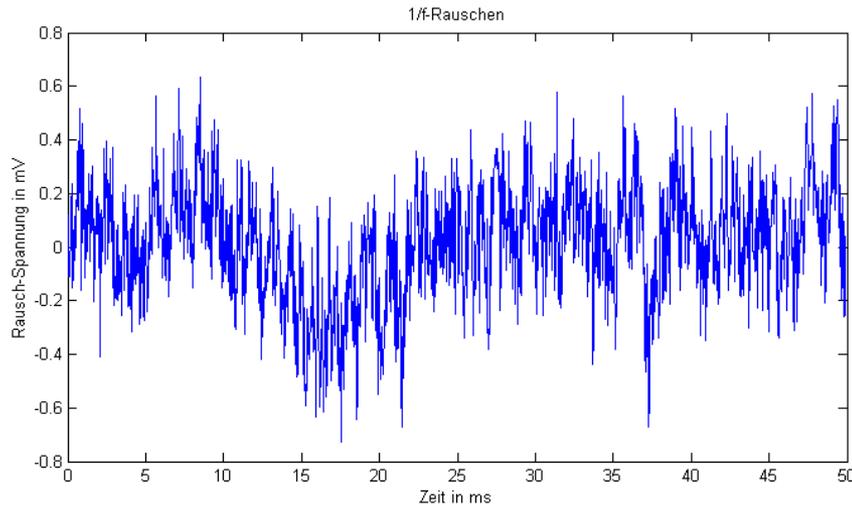


ideales weißes Rauschen ist
Gaußsches Rauschen

Was ist Rauschen?

Farbiges Rauschen

$$\frac{dp}{df} \neq \text{const}$$



zum Beispiel:

- 1/f - Rauschen („**Rosa Rauschen**“)
- 1/f² - Rauschen („**Rotes Rauschen**“)

Was ist Rauschen?

verschiedene Rauscharten: Definition per Autokorrelation

Autokorrelation ist, wenn eine Funktion mit sich selbst korreliert wird

Beispiel Zeitsignal: $x(t)$ korreliert mit $x(t+\text{Zeitverschiebung})$:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt$$

- Autokorrelationsfunktion ist symmetrisch; hat Maximum bei $\tau=0$
- Jede Periodizität in $x(t)$ erzeugt periodische Autokorrelationsfunktion
- Ideales weißes Rauschen für alle Frequenzen mit Leistungsdichte S_0

$$R_{xx}(\tau) = S_0 \delta(\tau)$$

Was ist Rauschen?

Rauschen in der Realität: Beispiele

Wasserfallrauschen

- $1/f$ -Rauschen

Brownsche Molekularbewegung

- $1/f^2$ -Rauschen

Was ist Rauschen?

Rauschen in der Realität: Ladungsträgerrauschen

thermisches (Widerstands-)Rauschen (Johnson(/)Nyquist-Rauschen)

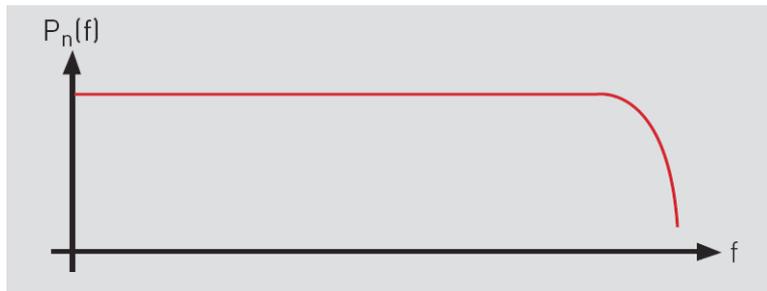
- Ursache: thermische Bewegung der Leitungselektronen
- Mittleres Spannungsquadrat an ohmschem Widerstand ist **proportional** zu:
 - Temperatur T
 - Widerstand R
 - Frequenzbandbreite Δf der Messung

$$\overline{u_{\text{rausch}}^2} = 4 k_B T R \Delta f$$

$\overline{u_{\text{rausch}}^2} \propto \text{Rauschleistung}$ \longrightarrow **weißes Rauschen**

- quantenmechanische Grenzfrequenz: $f_G = \frac{k_B T}{h}$

Für 300 K etwa bei 6 THz



Was ist Rauschen?

Rauschen in der Realität: Ladungsträgerrauschen

Schrotrauschen

- Ursache: elektrischer Strom überwindet Potentialbarriere
- Mittleres Stromquadrat:

$$\overline{i_{rausch}^2} = 2 e I \Delta f$$

$$\overline{i_{rausch}^2} \propto \text{Rauschleistung} \longrightarrow \text{weißes Rauschen}$$

Was ist Rauschen?

Rauschen stört jede Messung

Das **SNR** bzw. der **Störabstand** sagt aus, wie stark die Störung ist

$$SNR = \frac{\text{Nutzsignalleistung}}{\text{Rauschleistung}}$$

Jede Möglichkeit, das SNR zu erhöhen, ist von **enormer** Wichtigkeit

Rauschen überlisten - Teil 1



Dem Rauschen per „**Lock-In**“ trotzen

Zutaten:

- Referenzsignal
- stark verrauschtes Experiment (Lock-In Einsatzgebiet $\text{SNR} < 1$)
- Messsignal muss mit Referenzsignal modulierbar sein
- Lock-In-Verstärker

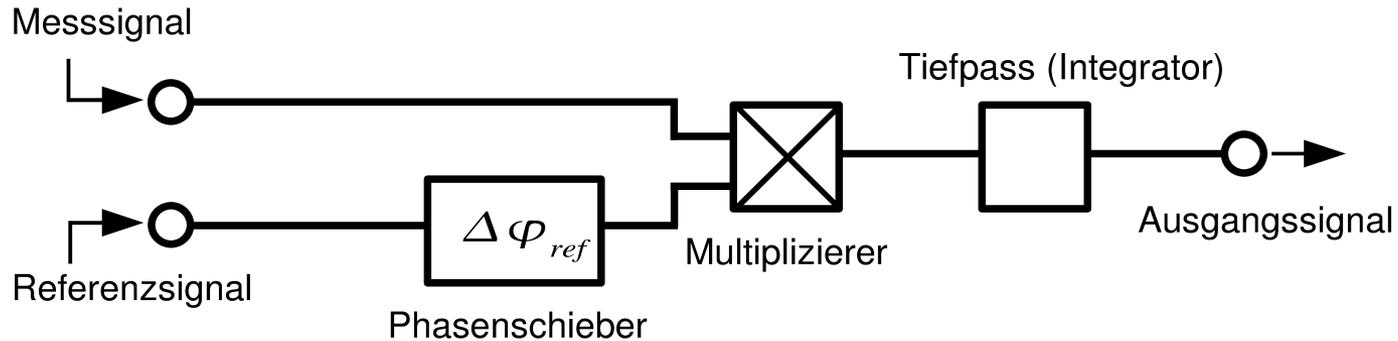
Prinzip:

- Bandpassfilter auf Modulationsfrequenz des Messsignals



Rauschleistung minimieren und
Signalleistung konstant halten

Funktionsweise Lock-In-Verstärker



→ Der Ausgang entspricht der Kreuzkorrelation von Messsignal und Referenz

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

Funktionsweise Lock-In-Verstärker

Lock-In Ausgang entspricht der Kreuzkorrelation von Messsignal und Referenz

ideale Kreuzkorrelation:

- unendliche Integrationszeit
- ist Null für verschiedene Frequenzen

reale Kreuzkorrelation mit endlicher Integrationszeit:

- Bandbreite weitet sich auf (z.B. 0,125 Hz für 1 s Integrationszeit)
- Rauschquellen (z.B. thermisches Rauschen) stören hier sofort

Beispiel Lock-In-Verstärker

Harmonischer Input auf reale Verstärkerstufe mit 4 nV/Hz Rauschen, 1 MHz Bandbreite und Verstärkungsfaktor 1000

Input Verstärkerstufe:

- Sinus (20 nV; 50 kHz)

Output Verstärkerstufe:

- 4 mV Rauschen ($1000 \times 1 \text{ MHz} \times 4 \text{ nV/Hz}$), 20 μV Nutzsignal \rightarrow SNR = 0,005

Input Lock-In-Verstärker (mit 0,125 Hz Bandbreite):

- verrauschtes Messsignal: Output Verstärkerstufe
- Referenzsignal: 50 kHz Sinus

Output Lock-In-Verstärker:

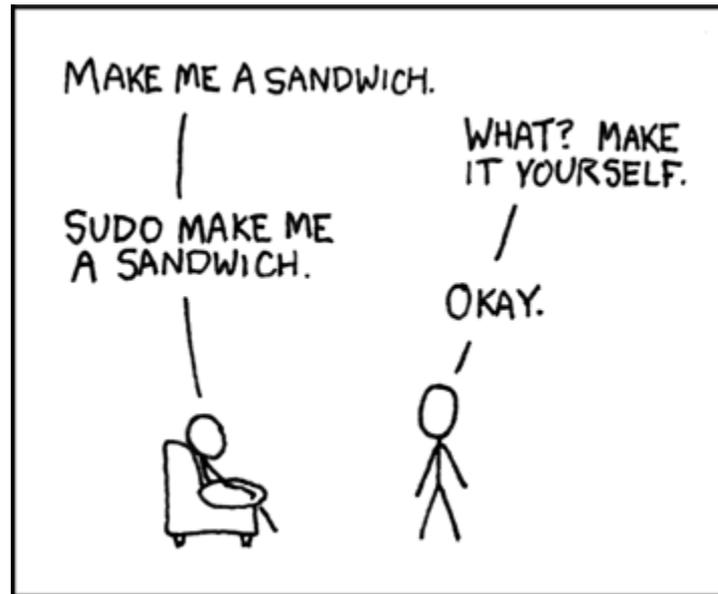
- nur noch 1,4 μV Rauschen ($1000 \times 0,125 \text{ Hz} \times 4 \text{ nV/Hz}$) \rightarrow SNR = 14

Realisierung von digitalem Lock-In durch **Digital Signal Processing**:

- hochwertige ADCs digitalisieren Signale
- Integrationszeit für Kreuzkorrelation kann beliebig lang gewählt werden
- Phasenlagen können extrem genau bestimmt werden

Lock-In-Technik detektiert Signal **unterhalb des Rauschuntergrunds**.

Rauschen überlisten - Teil 2



Das Rauschen durch „**Dithering**“ und „**Stochastische Resonanz**“ ausnutzen

Zutaten:

- Analog/Digital-zu-Digital-Wandlung
- spezielles Rauschen („**Dither**“) auf den Wandlungs-Eingang

Prinzip:

- Verhindern von systematischen Quantisierungsfehlern

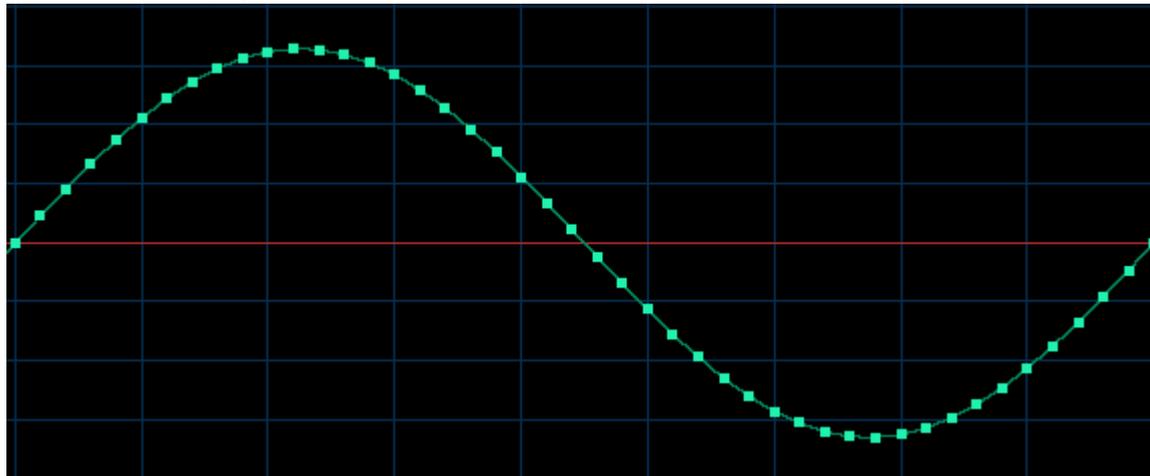
→ **Prägnante** Störsignale werden mit ein wenig zusätzlichem Rauschen reduziert, sodass das **SNR** insgesamt steigt

Dithering

Warum ein bisschen zusätzliches Rauschen gut sein kann...

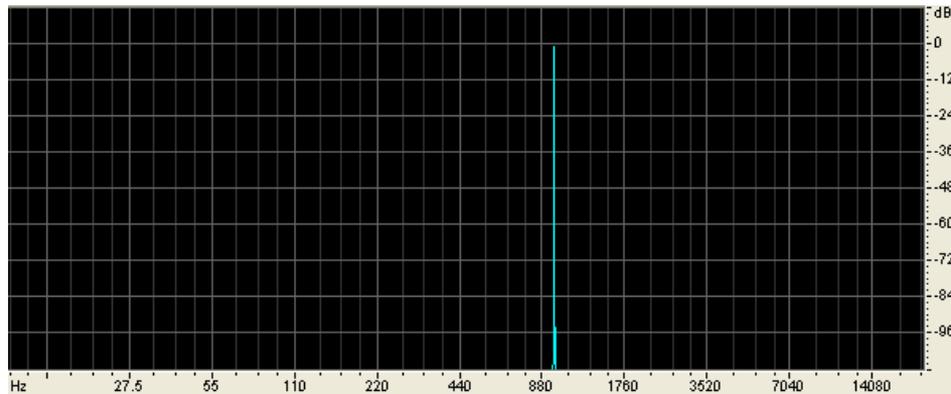
Ziel: 980 Hz Sinus auf CD bringen (16 Bit; 44.1 kHz)

Abtastung per ADC:



Dithering

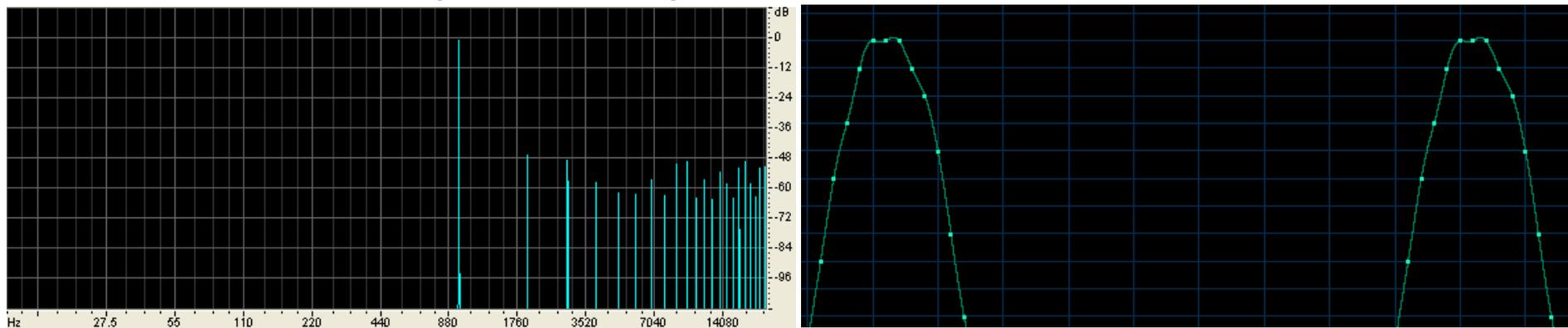
ideales Fourierspektrum:



Ursache der Harmonischen?

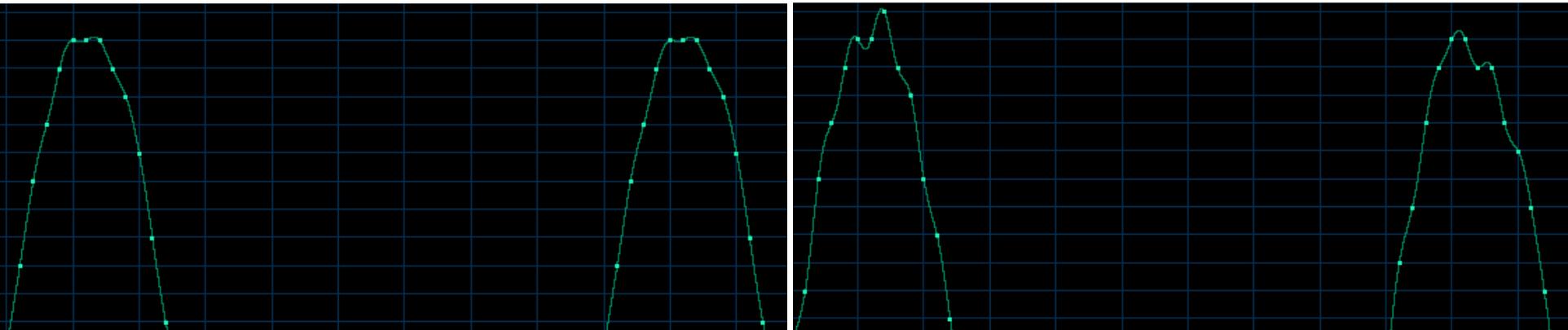
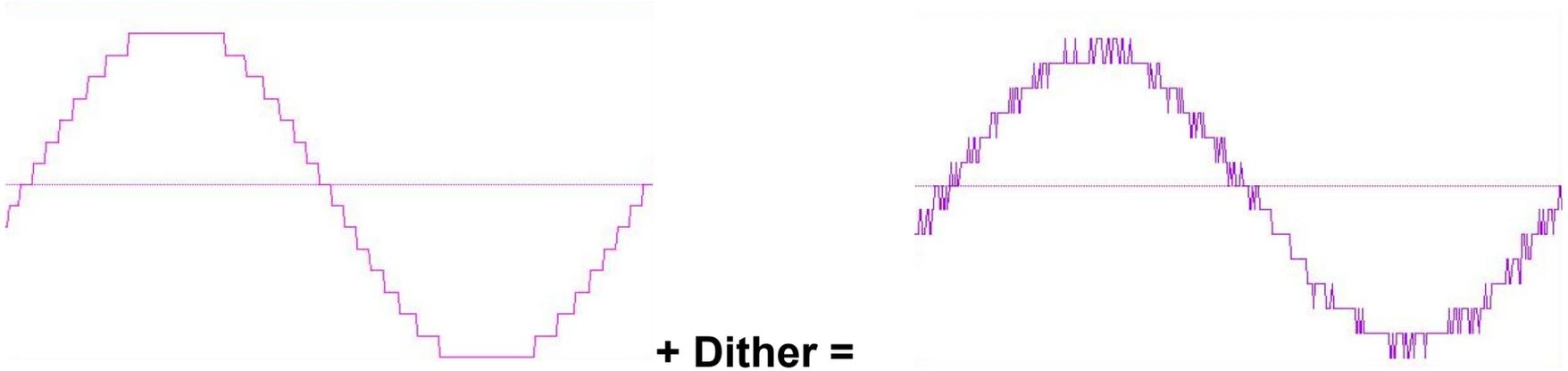
**periodisch auftretender
Quantisierungsfehler
bei Abtastung**

Fourierspektrum des abgetasteten Signals:



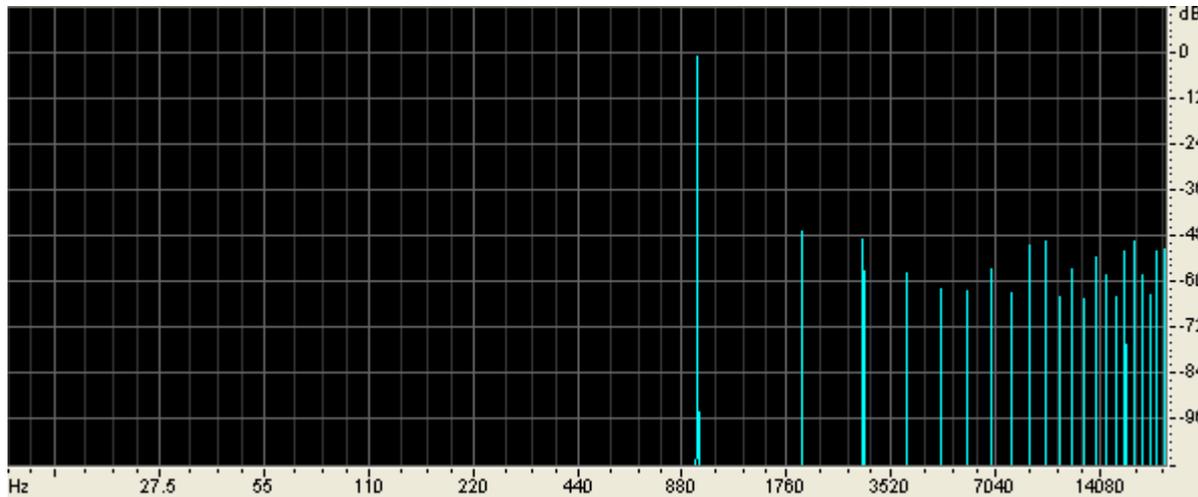
Dithering

Lösung: **Dither** auf den ADC Eingang oder auf das Least Significant Bit

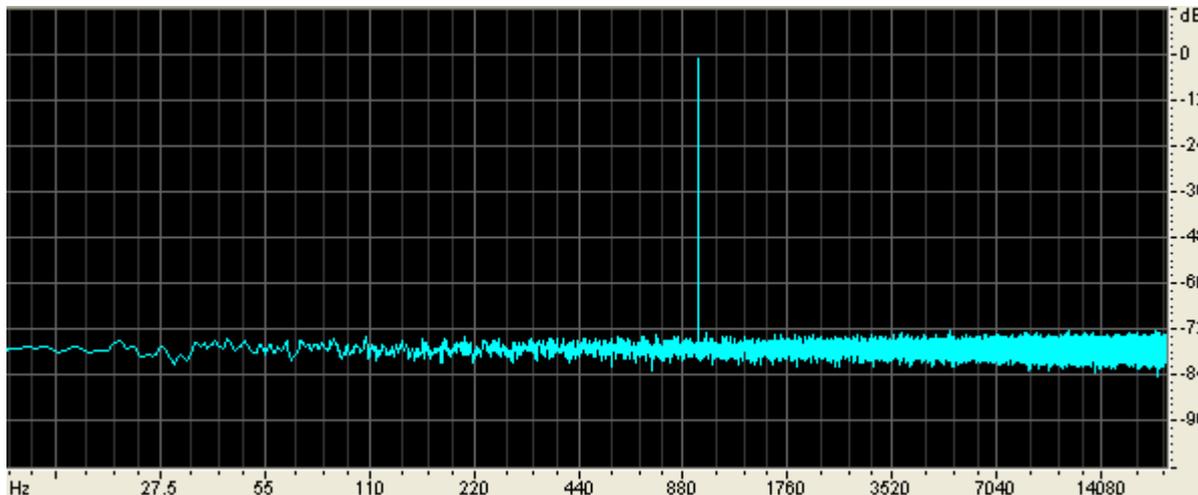


Dithering

Ergebnis: Intensität aus Harmonischen in kontinuierlichem Rauschuntergrund



+ Dither =



SNR-Gewinn durch
Hinzufügen von
Rauschen!



Dithering

Anpassung der spektralen Leistungsdichte des Dithers: **Noise Shaping**

Die Anpassung des Dithers auf ein spezielles Problem ist eine Wissenschaft für sich

Hinzufügen von optimiertem Dither-Rauschen
für **Noise Shaping** @ 44.1 kHz Sampling Rate:

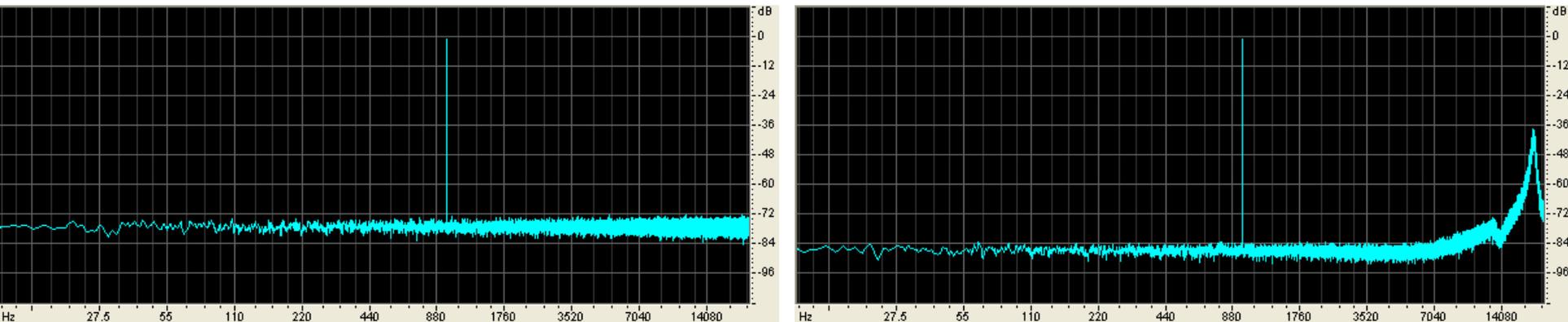


Figure 7 - frequency spectrum for 980Hz sine wave, -60dB, 24 bits, 44.1kHz, dithering with noise shaping

noch höheres SNR im hörbaren Bereich durch **Noise Shaping!** Jetzt kann das Signal auf CD....

Zutaten:

- Zwei Zustände; getrennt durch Schwellwert / Energiebarriere
- periodisches Signal (kleiner als Barriere)
- starkes Rauschen (möglichst weiß)

Prinzip:

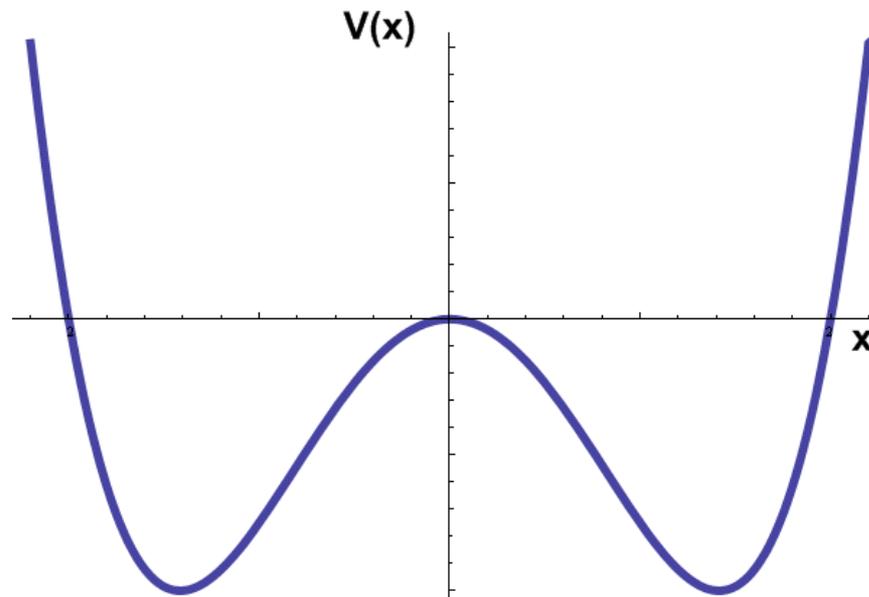
- **Synchronisation** von periodischem Signal und Rauschen (**Resonanz**)



durch Rauschen induziertes Schalten
zwischen den beiden Zuständen **mit der
Frequenz des periodischen Signals**

Standardmodell für **Stochastische Resonanz (SR)**

- gedämpfte Bewegung eines Teilchens in bistabilem Potential $V(x)$



$$V(x) = -ax^2 + bx^4$$

Standardmodell für **Stochastische Resonanz (SR)**

- gedämpfte Bewegung eines Teilchens in bistabilem Potential $V(x)$
- Hinzufügen von weißem Rauschen $\xi(t)$ mit Leistung D

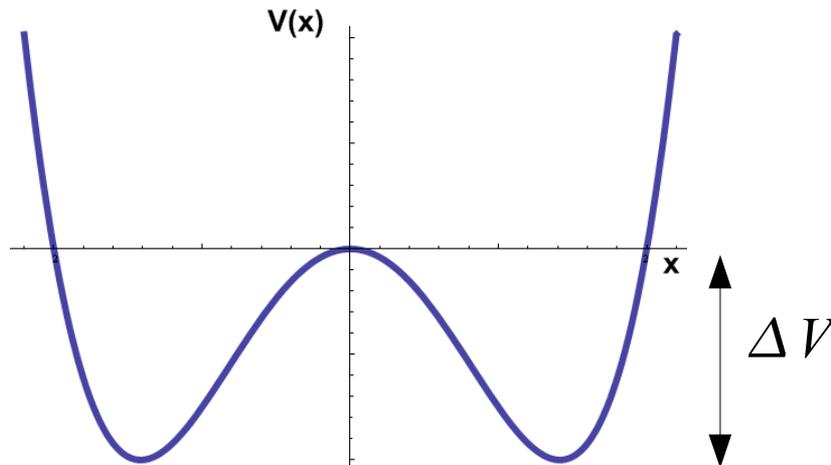
$$R_{\xi\xi}(\tau) = D \delta(\tau)$$

- Sehr starke Dämpfung (adiabatischer Grenzfall) \rightarrow Vernachlässigung von \ddot{x}

$$m \ddot{x} = -\frac{d}{dx} V(x) - \gamma \dot{x} + \xi(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dx} V(x) + \frac{1}{\gamma} \xi(t)$$

Langevin-Gleichung; $x(t)$ **statistisch** lösbar
durch Methode der **Fokker-Planck-Gleichung**

Standardmodell für Stochastische Resonanz (SR)



$$R_{\xi\xi}(\tau) = D \delta(\tau)$$

Kramers-Rate:

mittlere Übergangsrate zwischen den Mulden, induziert durch das Rauschen

$$r_K \propto \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right)$$

Standardmodell für Stochastische Resonanz (SR)

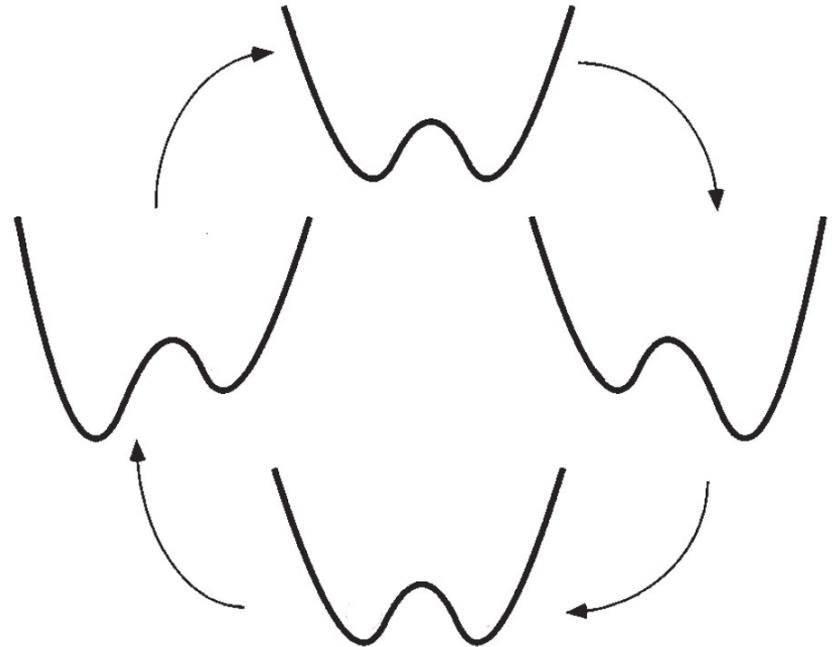
Eine Zutat fehlt nun noch für SR:

- kleine periodische Anregung:

$$V(x, t) = -ax^2 + bx^4 - Ax \sin(2\pi \Omega t)$$

- Dabei ist wichtig:

$$A < \Delta V$$

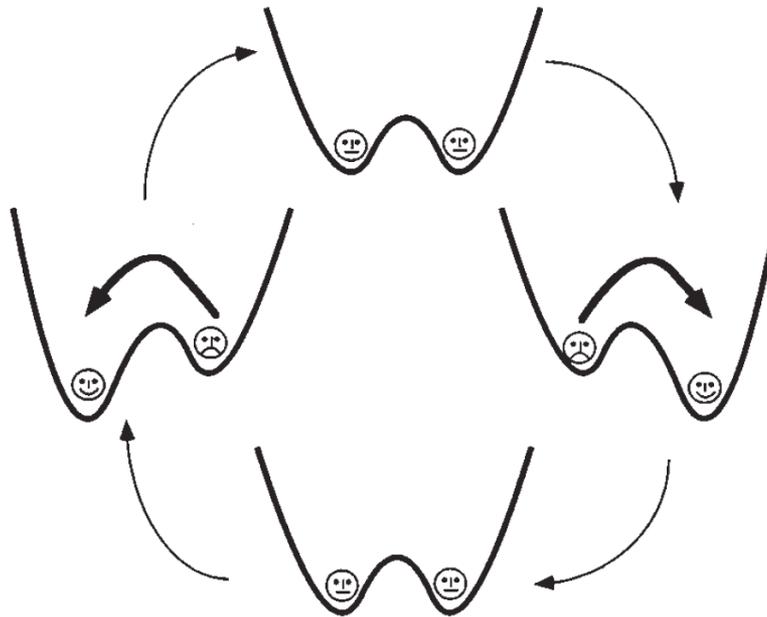


Stochastische Resonanz

Standardmodell für **Stochastische Resonanz (SR)**

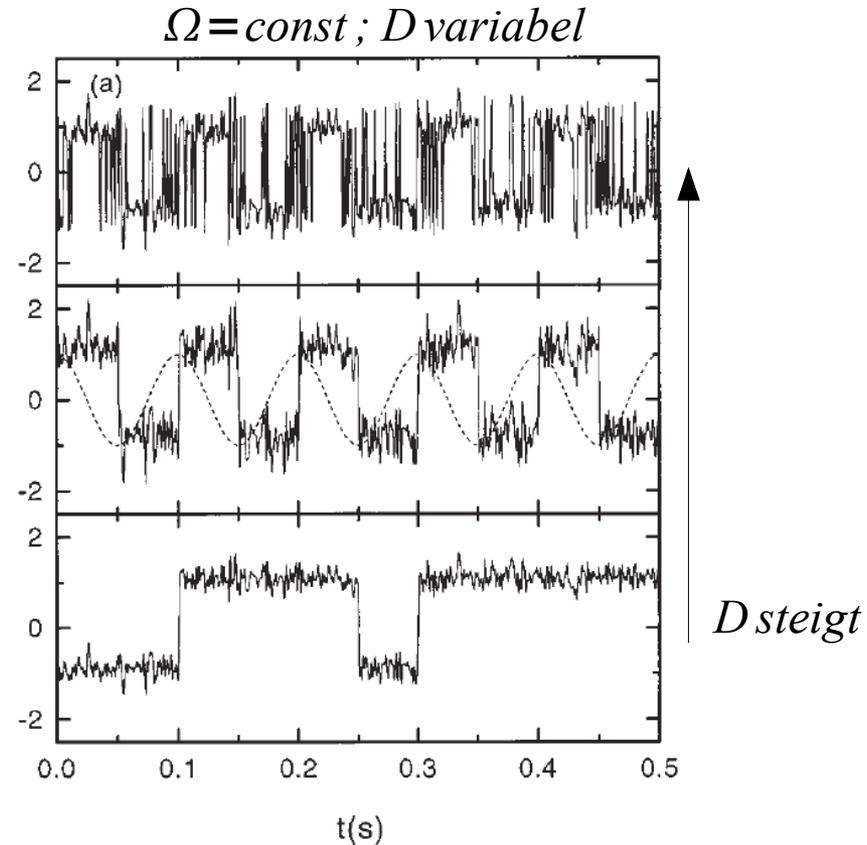
time-scale matching condition für SR: $2T_K = T_\Omega$

Die mittlere Wartezeit zwischen zwei rauschinduzierten Übergängen muss der **halben** Periodendauer der Anregung entsprechen



Stochastische Resonanz

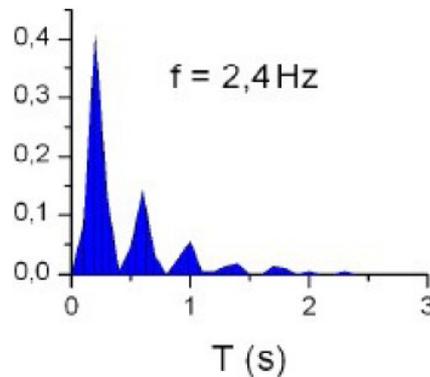
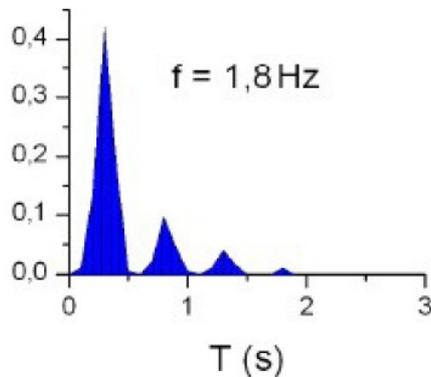
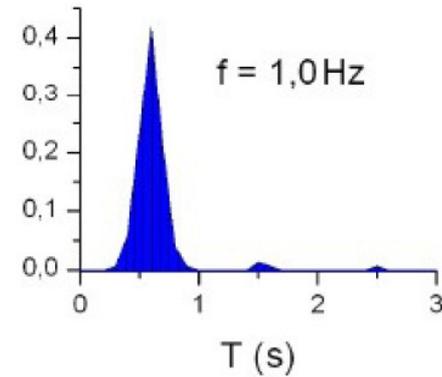
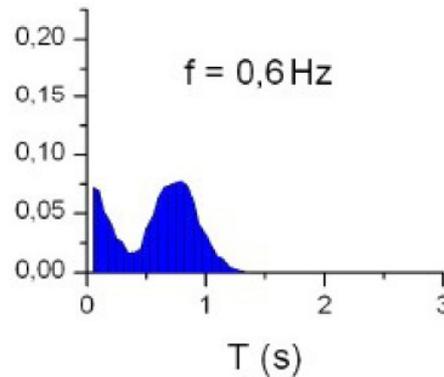
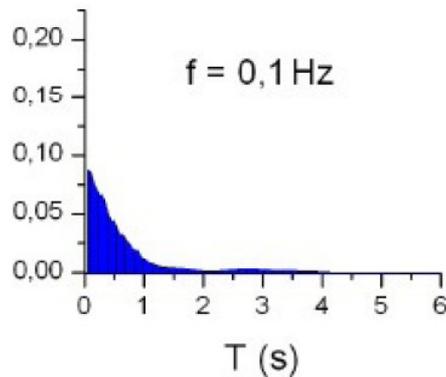
$2T_K = T_\Omega$ erfüllen durch Variation von Ω und/oder D



Stochastische Resonanz

SR quantifizieren mittels *residence time distribution*

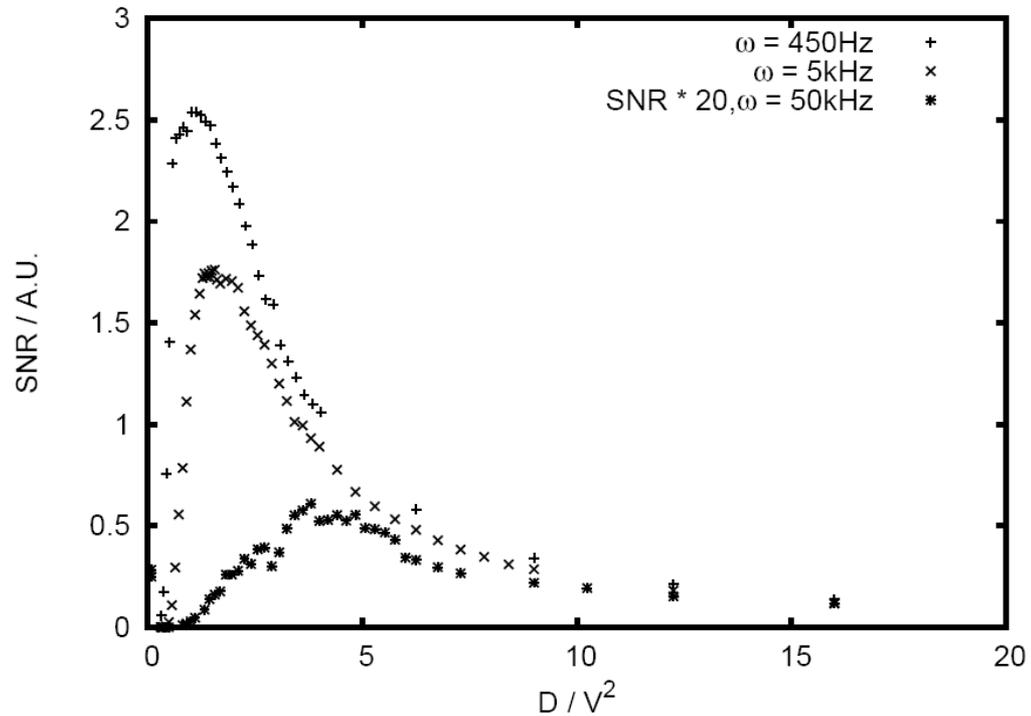
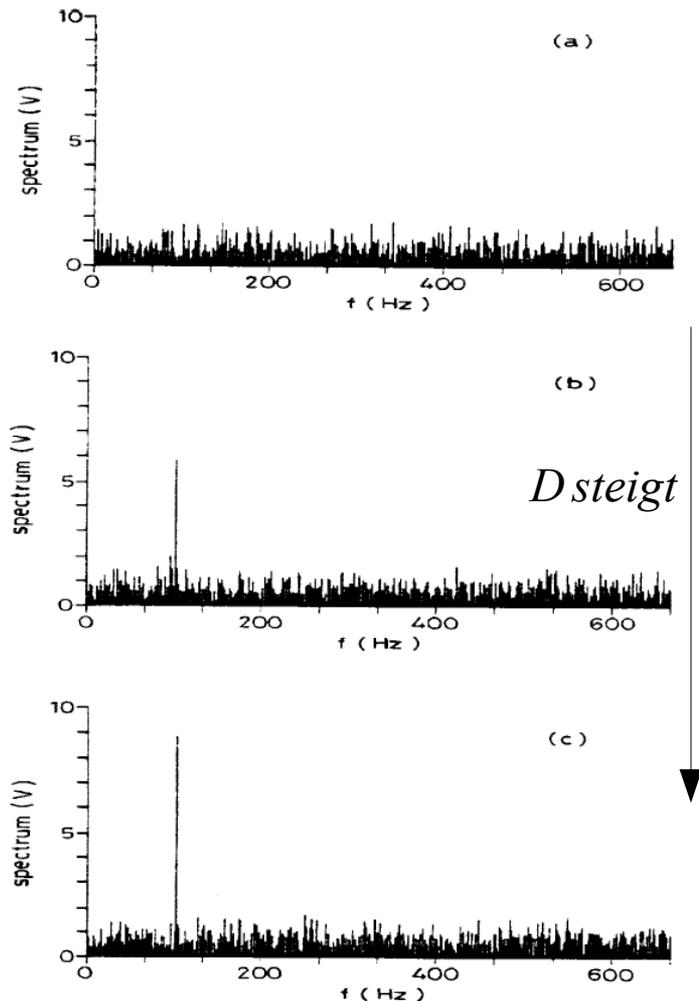
$D = \text{const} ; \Omega \text{ variabel}$



$$T_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) T_\Omega$$

Stochastische Resonanz

SR quantifizieren mittels *spektraler Leistungsdichte* und **SNR**

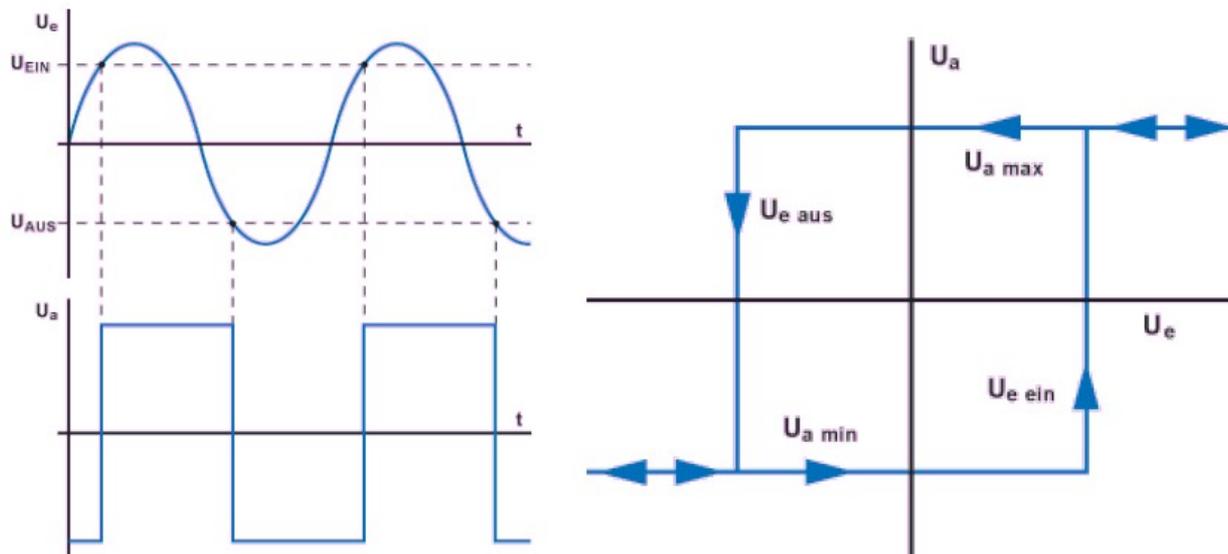


➔ **Rauschen kann ausgenutzt werden,**
um ein extrem schwaches
periodisches Signal zu **verstärken.**

experimentelle Realisierungen von SR

Klassisches SR-Beispiel: **Schmitt-Trigger**

- zwei Zustände (Ausgangsspannung)
- 2 Schaltschwellen (hystereseförmig)



experimentelle Realisierungen von SR

sonstige Realisierungen:

- Bedingungen für SR (Schwelle, Modulation, Rauschen) sehr allgemein
 - ➔ Realisierungen vielfältig (bistabile Laser, optische Falle, elektrisch analoge Systeme, ...)

SR ist eine Möglichkeit zu erklären, wie...

- ...Eiszeiten entstehen (Orbit-Exzentrizität vs. Strahlungsschwankung)
- ...Krabbe (im Wasser) oder Grille (an Luft) herannahende Feinde trotz starkem Rauschen fühlen
- ...Neuronen ihre Information mit geringster Energie austauschen können

SR könnte vielleicht digitales Computing revolutionieren..?!

...damit ist das böse Rauschen nun wirklich überlistet...



Zusammenfassung

Lock-In: Extrem schmaler Bandpass durch Nutzung eines Referenzsignals schränkt Rauschleistung erheblich ein: Signal unterhalb des Rauschens detektieren.

Dither: Geschicktes Hinzufügen von Rauschen, um periodische Quantisierungsfehler bei Digitalisierung zu minimieren.

SR: Synchronisation von rauschinduzierten Übergängen mit kleiner periodischer Anregung. Schwache Information kann mittels **SR** durch Rauschen verstärkt werden.

Literatur

- **Gammaitoni et al.:** *Stochastic resonance* (Rev. Mod. Phys., Vol. 70, No. 1, 1998)
- **Hameg Instruments:** Fachartikel: *Was ist Rauschen?*
- **Stefan Lang:** Vortrag: *Grundlagen der Lock-In Messtechnik*
- **Universität Darmstadt:** Praktikumsanleitung: *Stochastische Resonanz*
- **Steffen Bieker:** Vortrag: *Durch Rauschen induziertes Schalten*
- **Karsten Pufahl:** Vortrag: *Rauschen, Langevin-Gleichung, Fokker-Planck-Gleichung*
- **Wikipedia:** *Rauschen_(Physik), Spektrale_Leistungsdichte, Korrelation, Dithering, Noise_Shaping, Lock-In-Verstärker, ...*
- **Stephen Dawson:** Webartikel: *What is Dither?*
- **Walt Kester:** Fachartikel: *Ist ein wenig Rauschen gut?*